Übungen Diskrete Mathematik, TE

3. Übungsblatt

25. März 2014

11. Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$18x + 314y = 2014.$$

13. Man bestimme alle Lösungen der folgenden Kongruenzgleichungen:

(a)
$$2014x \equiv 25 \mod 2503,$$

(b)
$$32x \equiv 2 \mod 50.$$

14. Man zeige: Wenn ein Element $[x]_m \in \mathbb{Z}_m$ nicht invertierbar ist, dann gibt es ein Element $[y]_m \in \mathbb{Z}_m$ mit $[y]_m \neq [0]_m$ und $[x]_m \cdot [y]_m = [0]_m$.

15. Man bestimme die Lösungen der folgenden simultanen Kongruenzen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \mod 4 \\ x &\equiv 2 \mod 5 \\ x &\equiv 1 \mod 7 \\ x &\equiv 0 \mod 9 \end{aligned}$$

16. Hat das folgende System von Kongruenzen eine Lösung? Wenn ja, dann bestimme diese.

$$\begin{aligned} x &\equiv 19 \mod 21 \\ x &\equiv 25 \mod 39 \\ x &\equiv 12 \mod 77 \\ x &\equiv 12 \mod 143 \end{aligned}$$

17. Sind die folgenden Strukturen $(X, \circ)$ abelsche Gruppen?

(a) Sei $m \in \mathbb{N}$, $X = \mathbb{Z}_m$ und $[x]_m \circ [y]_m = [x + y]_m$.

(b) Sei $m \in \mathbb{N}$, $X = \mathbb{Z}_m$ und $[x]_m \circ [y]_m = [x \cdot y]_m$.

(c) Sei p eine Primzahl, $X = \mathbb{Z}_p \setminus \{[0]_p\}$ und $[x]_p \circ [y]_p = [x \cdot y]_p$.

18. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe.

(a) Sei $H = \{x \in G : \exists y \in G \text{ mit } x = y \circ y\}$. Ist $(H, \circ)$ eine Gruppe?

(b) Sei $H = \{x \in G : \forall y \in G \text{ ist } x \circ y = y \circ x\}$. Ist $(H, \circ)$ eine Gruppe?