Übungen Diskrete Mathematik, TE

7. Übungsblatt

13. Mai 2014

34. (Lateinisches Quadrat:) Ein lateinisches Quadrat ist ein Quadrat mit n Zeilen und n Spalten mit folgenden Eigenschaften:

- In jedem Feld steht genau eine Zahl aus der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$.
- In jeder Zeile steht jede dieser Zahlen genau einmal.
- In jeder Spalte steht jede dieser Zahlen genau einmal.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Beispiel für ein lateinisches Quadrat der Größe $n = 3$

Seien A_{ijk} logische Variable, die folgendes bedeuten sollen:

$$A_{ijk} = \begin{cases} W & \text{wenn in Feld } (i,j) \text{ die Zahl } k \text{ steht.} \\ F & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Man finde eine logische Formel, die genau dann wahr ist, wenn in einem Feld (i, j) genau eine Zahl steht.

(b) Man finde eine logische Formel, die genau dann wahr ist, wenn in Zeile i die Zahl k genau einmal vorkommt.

(c) Man finde eine logische Formel, die genau dann wahr ist, wenn die Variablen A_{ijk} ein lateinisches Quadrat beschreiben.

(d) Man erkläre, wie man dies erweitern kann, um 9×9 Sudokus zu lösen, das heißt, wie eine Bedingung an 3×3-Unterquadrate ausschaut und wie vorgegebene Ziffern in die logische Formel eingebaut werden können.

Hinweis zu a) und b): Man finde eine Formel in DNF.
Hinweis zu c): Es reicht, eine Menge von Formeln anzugeben, die man dann noch durch $\wedge$ verknüpfen muss.

35. Seien

$$P_1 = A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 \vee A_5$$

und

$$P_2 = (A_1 \vee A_2 \vee Y_1) \wedge (\neg Y_1 \vee A_3 \vee Y_2) \wedge (\neg Y_2 \vee A_4 \vee A_5)$$

logische Formeln und $\beta : \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\} \to \{W, F\}$ eine Variablenbelegung.

Man zeige, dass es genau dann eine Variablenbelegung $\beta^* : \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, Y_1, Y_2\} \to \{W, F\}$ mit $\beta^*(A_i) = \beta(A_i)$ und $\overline{\beta}^*(P_2) = W$ gibt, wenn $\overline{\beta}(P_1) = W$.

36. Man zeige durch logisches Schließen mit den unten stehenden Regeln, dass folgende Aussagen Tautologien sind.

(a) $(A \wedge B) \to (B \wedge A)$,

(b) $((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P$,

(c) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

37. Man zeige die folgenden aussagenlogischen Folgerungen $P_1, P_2 \Rightarrow P$ durch logisches Schließen mit den unten stehenden Regeln.

(a) $P_1 = A \wedge B$, $P_2 = \neg B$; $P = \neg A \vee \neg B$,

(b) $P_1 = \neg A \vee B$, $P_2 = \neg B \vee C$; $P = \neg A \vee C$,

(c) $P_1 = B$; $P = (A \to \neg B) \to (B \wedge \neg A)$.

Liste der erlaubten Regeln

$$\neg\neg A \iff A \tag{1}$$
$$A \wedge \top \iff A \tag{2}$$
$$A \vee \bot \iff A \tag{3}$$
$$A \wedge A \iff A \tag{4}$$
$$A \vee A \iff A \tag{5}$$
$$(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C) \tag{6}$$
$$(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C) \tag{7}$$
$$A \wedge B \iff B \wedge A \tag{8}$$
$$A \vee B \iff B \vee A \tag{9}$$
$$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \tag{10}$$
$$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{11}$$
$$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B \tag{12}$$
$$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B \tag{13}$$
$$A \to B \iff \neg A \vee B \tag{14}$$
$$A \to B \iff \neg B \to \neg A \tag{15}$$
$$A \vee \neg A \iff \top \tag{16}$$
$$A \wedge \neg A \iff \bot \tag{17}$$
$$A \vee \top \iff \top \tag{18}$$
$$A \wedge \bot \iff \bot \tag{19}$$
$$(A \to B) \wedge (B \to C) \implies (A \to C) \tag{20}$$
$$\bot \implies A \tag{21}$$
$$A \implies \top \tag{22}$$