Übungen Mathematik I, M

Übungsblatt 1, Lösungen
(Stoff aus Mathematik 0)

09.10.2012

1. Kommissar K hat 3 Tatverdächtige P, Q und R. Er weiß:

(a) Wenn sich Q oder R als Täter herausstellen, dann ist P unschuldig.

(b) Ist aber P oder R unschuldig, dann muss Q ein Täter sein.

(c) Ist R unschuldig, so ist P Mittäter.

Können Sie daraus schließen wer schuldig ist? Verwenden Sie Wahrheitstafeln!

Lösung: Mit (p), (q) und (r) bezeichnen wir jeweils die Aussage, dass P, Q beziehungsweise R schuldig ist. Die drei Aussagen aus der Aufgabenstellung lauten somit

$$\begin{aligned} (a): &\quad ((q) \vee (r)) \Rightarrow \neg(p) \\ (b): &\quad (\neg(p) \vee \neg(r)) \Rightarrow (q) \\ (c): &\quad \neg(r) \Rightarrow (p) \end{aligned}$$

Es gibt acht Möglichkeiten, welche der Verdächtigen schuldig und welche unschuldig sind. Für jede dieser Möglichkeiten untersuchen wir die Aussage (a):

(p)	(q)	(r)	$(q) \vee (r)$	$\neg(p)$	(a)
w	w	w	w	f	f
w	w	f	w	f	f
w	f	w	w	f	f
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w
f	f	f	f	w	w

Da K weiß, dass (a) wahr ist, verbleiben nur die entsprechenden Möglichkeiten für (p), (q) und (r). Für diese untersuchen wir nun die Aussage (b):

(p)	(q)	(r)	$\neg(p)$	$\neg(r)$	$\neg(p) \vee \neg(r)$	(q)	(b)
w	f	f	f	w	w	f	f
f	w	w	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	f	f

Für Aussage (c) müssen wir also nur noch zwei Fälle untersuchen:

(p)	(q)	(r)	$\neg(r)$	(p)	(c)
f	w	w	f	f	w
f	w	f	w	f	f

Somit weiß K, dass Q und R schuldig sind und P unschuldig. □

2. Gegeben seien die Mengen

$$M_1 = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots\},$$
$$M_2 = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, \ldots\}.$$

(a) Drücken Sie M_1 und M_2 durch Angabe einer Eigenschaft formal aus.

(b) Geben Sie $M_1 \cap M_2$ an.

(c) Geben Sie $M_1 \setminus M_2$ und $M_2 \setminus M_1$ an.

(d) Wieviele Teilmengen besitzt $(M_1 \cap [0, 10]) \cup \{0\}$?

Lösung: (a) M_1 besteht aus allen Quadratzahlen. Für die Menge M_2 gibt es mehrere Möglichkeiten: Sie kann aus allen Zahlen ab 4 bestehen, die durch 2 oder 3 teilbar sind, oder sie besteht aus allen Zahlen größer 1, die keine Primzahlen sind. Wir wählen im Folgenden letztere Variante. Also:

$$M_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}$$
$$M_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \colon n = ab\}$$

(b) Da keine Quadratzahl eine Primzahl ist, ist $M_1 \cap M_2 = M_1 \setminus \{1\} = \{4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$.

(c) Die 1 ist die einzige Quadratzahl, die nicht in M_2 liegt, also $M_1 \setminus M_2 = \{1\}$. Die Menge $M_2 \setminus M_1$ besteht aus allen natürlichen Zahlen, die weder Quadratzahl noch Primzahl sind, also

$$M_2 \setminus M_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} \notin \mathbb{N} \wedge \exists a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \colon n = ab\}$$

(d) Es ist $(M_1 \cap [0, 10]) \cup \{0\} = \{0, 1, 4, 9\}$. Eine Menge mit vier Elementen hat $2^4 = 16$ Teilmengen.

□

3. Schreiben Sie folgende Summen mit Hilfe des Σ-Zeichen:

(a) $1 + 9 + 25 + 49 + 81 + \ldots + n^2$

(b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{16384}$

(c) $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 \ldots + 100$

(d) $\frac{1}{21} + \frac{1}{24} + \frac{1}{27} + \frac{1}{30} + \ldots + \frac{1}{102}$

Lösung: (a) Es ist

$$1 + 9 + 25 + 49 + 81 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} (2k-1)^2.$$

Hierbei nehmen wir an, dass n ungerade ist.

(b) Es ist

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{16384} = \sum_{k=2}^{14} \frac{1}{2^k}.$$

(c) Es ist

$$-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 \cdots + 100 = \sum_{k=1}^{100} (-1)^k k.$$

(d) Es ist

$$\frac{1}{21} + \frac{1}{24} + \frac{1}{27} + \frac{1}{30} + \cdots + \frac{1}{102} = \sum_{k=7}^{34} \frac{1}{3k}.$$

□

4. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Lösung: Als Induktionsanfang zeigen wir, dass die Behauptung für $n = 1$ wahr ist. Die linke Seite der Behauptung entspricht in diesem Fall

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Die rechte Seite entspricht

$$1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Beide Seiten sind identisch und somit ist der Induktionsanfang gezeigt.

Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass wir die Behauptung bereits für $n = N$ bewiesen haben (also $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}$ gilt) und zeigen, dass hieraus die Behauptung für $n = N + 1$ folgt. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)}.$$

($\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)}$ steht für $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{N(N+1)} + \frac{1}{(N+1)(N+2)}$ und $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)}$ steht für $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{N(N+1)}$, also ist $\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(N+1)(N+2)} +$

$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)}$.) Nach Induktionsannahme entspricht die rechte Summe $1 - \frac{1}{N+1}$ und wir haben

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{(N+1)(N+2)} + 1 - \frac{1}{N+1} \\ &= 1 + \frac{1}{(N+1)(N+2)} - \frac{N+2}{(N+1)(N+2)} \\ &= 1 - \frac{N+1}{(N+1)(N+2)} = 1 - \frac{1}{N+2}.\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und die Behauptung für alle n bewiesen.

□

5. Bestimmen Sie die größtmögliche Menge $A \subset \mathbb{R}$, sodass

(a) $f : A \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

(b) $g : A \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \ln(x^2 + x - 6)$

(c) $h : A \to \mathbb{R}$ $\quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$

eine Funktion ist.

Lösung: (a) Der Wert $\frac{1}{x^2-4}$ ist für alle x mit $x^2 \neq 4$ definiert, es ist also $A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

(b) Der Wert $\ln(x^2 + x - 6)$ ist für alle x mit $x^2 + x - 6 > 0$ definiert. Die Nullstellen von $x^2 + x - 6$ sind -3 und 2 (dies findet man entweder durch Ausprobieren heraus oder man verwendet eine Formel für die Nullstellen quadratischer Polynome). Zwischen diesen Werten ist die Funktion negativ (für $x = 0$ ist sie negativ und daher überall zwischen -3 und 2), ansonsten positiv. Es ist also $A = \mathbb{R} \setminus [-3, 2]$.

(c) Der Wert $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ ist für alle x mit $|x| \neq 0$ definiert, es ist also $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

□

6. Gegeben seien die Funktionen f und g mit

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} && g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \\ &f(x) = x^2 + x && g(x) = \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

Bilden Sie (falls möglich) die Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$.

Lösung: Da der Definitionsbereich von g nicht den gesamten Bildbereich von f umfasst (f bildet die Werte $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ und $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ auf 1 ab), ist $g \circ f$ nicht definiert.

Die Funktion $f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ ist definiert und zwar ist

$$(f \circ g)(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{(x-1)^2} = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

□

7. Sei A die Menge aller lebenden Menschen unter 20 Jahre und B die Menge aller Menschen. Betrachte nun die Funktion $f : A \to B$, die jeder Person $x \in A$ die Mutter von x zuweist. Ist f injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung: Es gibt lebende Menschen unter 20 Jahren, die Geschwister sind. Solche Menschen bildet f auf das gleiche Element von B (ihre Mutter) ab. Daher ist f nicht injektiv.

Es gibt Menschen, welche nicht die Mutter eines lebenden Menschen unter 20 Jahren sind: alle kinderlose Menschen, alle Männer und alle Menschen, deren Kinder bereits über 20 Jahre (oder nicht mehr am Leben) sind. Solche Menschen liegen nicht im Bildbereich von f, also ist f nicht surjektiv.

Somit ist f auch nicht bijektiv. (Hierfür reichte bereits eine der beiden Eigenschaften “nicht injektiv” und “nicht surjektiv” aus.) $\square$

8. Bei einer Umfrage wurden 243 Sportler befragt. Dabei gaben 187 an, dass sie täglich trainieren. Weiters ergab die Studie, dass 124 Personen auf gesunde Ernährung achten. Weiviele Befragte trainieren täglich und achten auf gesunde Ernährung?

Lösung: Sei A die Menge der befragten Sportler, B die Menge derer von ihnen, die täglich trainieren, sowie C die Menge derer von ihnen, die auf gesunde Ernährung achten. Laut Aufgabenstellung ist $|A| = 243$, $|B| = 187$ und $|C| = 124$. Gesucht ist der Wert $|B \cap C|$.

Es gilt $|B| + |C| = |B \cup C| + |B \cap C|$, denn auf beiden Seiten werden alle Elemente von B und C gezählt, wobei genau die Elemente doppelt gezählt werden, die in beiden Mengen liegen. Weil B und C Teilmengen von A sind, ist $|B \cup C| \leq |A|$. Wir haben also

$$187 + 124 \leq 243 + |B \cap C|$$

und somit

$$|B \cap C| \geq 187 + 124 - 243 = 68.$$

Es sind also mindestens 68 Befragte, die täglich trainieren und auf gesunde Ernährung achten. $\square$

9. Gegeben sind die Funktionen $f, g,$ und h von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, wobei

(a) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 12x + 12}$,

(b) $g(x) = \cos(x - 3) + 5$,

(c) $h(x) = 3 - x^5$.

Stellen Sie für $f, g,$ und h jeweils fest, ob die Funktion

- injektiv, surjektiv, bijektiv,
- beschränkt
- (streng) monoton wachsend oder fallend,

ist.

Lösung: (a) Zunächst einmal bemerken wir, dass sich f auch als $f(x) = \sqrt{3(x-2)^2} = \sqrt{3} \cdot |x-2|$ schreiben lässt. Diese Funktion ist nicht injektiv, da zum Beispiel $f(1) = f(3) = \sqrt{3}$ ist. Sie ist auch nicht surjektiv, da sie keine negativen Funktionswerte hat. Bijektiv ist sie daher auch nicht.

Nach unten ist f durch 0 beschränkt, nach oben ist sie unbeschränkt. Sie ist weder monoton wachsend noch monoton fallend, denn im Bereich $x \leq 2$ fällt sie streng monoton und im Bereich $x \geq 2$ wächst sie streng monoton.

(b) Die Funktion g ist weder injektiv, surjektiv, noch bijektiv: Sie ist nicht injektiv, weil der Kosinus periodisch ist, und nicht surjektiv, weil der Kosinus nur Werte zwischen -1 und 1 annimmt. Daher ist sie auch nicht bijektiv. Beschränkt ist g nach oben durch 6 und nach unten durch 4. Als periodische Funktion ist g weder monoton wachsend noch monoton fallend.

(c) Die Funktion h ist injektiv, da für $x_1 \neq x_2$ auch $x_1^5 \neq x_2^5$ und somit $h(x_1) \neq h(x_2)$ gilt. Sie ist surjektiv, da jeder Wert y an der Stelle $\sqrt[5]{3-y}$ (für $3-y \geq 0$) beziehungsweise $-\sqrt[5]{y-3}$ (für $y-3 \geq 0$) angenommen wird. Daher ist sie auch bijektiv und nicht beschränkt. Zudem ist sie streng monoton fallend, denn aus $x_1 < x_2$ folgt $x_1^5 < x_2^5$ und somit $h(x_1) > h(x_2)$. □

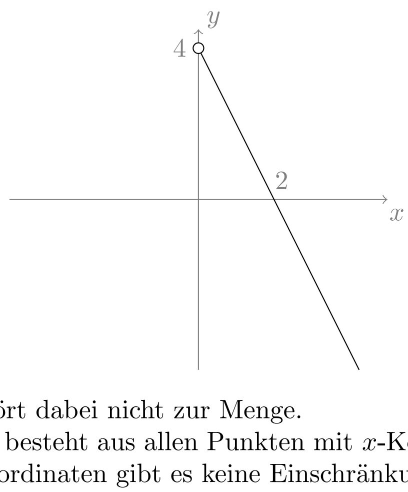
10. Stellen Sie die folgenden Mengen graphisch dar:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 6x + 3y = 12 \wedge x > 0\}$$

und

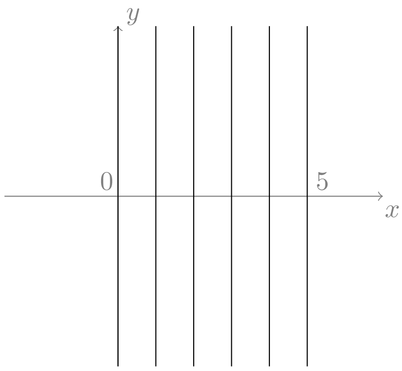
$$\{(x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R} : |x| \leq 5\}$$

Lösung: Die erste Menge besteht aus allen Punkten mit positiver x-Koordinate und $6x + 3y = 12$. Diese Gleichung kann man zu $y = 4 - 2x$ umformen. Es handelt sich also um eine Gerade mit Steigung -2, welche die y-Achse im Wert 4 schneidet. Die Menge sieht daher wie folgt aus:



Der Punkt $(0, 4)$ gehört dabei nicht zur Menge.

Die zweite Menge besteht aus allen Punkten mit x-Koordinaten 0, 1, 2, 3, 4 oder 5. Für die y-Koordinaten gibt es keine Einschränkung, die Menge besteht also aus sechs Vertikalen an den ganzzahligen x-Koordinaten von 0 bis 5:



$\square$