

Mathematik 0 WS 2012/13

2. Übungsblatt

1. Berechnen Sie unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes

$$(-2x + 3y)^7$$

2. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

(a) $z^2 - z - 2 = (3z - 14)i$

(b) $\frac{(1 + 2i)z + 9}{(3 + 4i)z - (9 + 4i)} = 8 - 5i,$

(c) $z^6 = -1$

3. Ermitteln Sie jene Punktmenge in \mathbb{C} , die durch die Ungleichungen

$$z\bar{z} < 3(z + \bar{z}) \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} z > 0$$

festgelegt wird und stellen Sie sie graphisch in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

4. Beweisen Sie für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m \geq k$:

(a)

$$\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$$

(b)

$$\binom{n+1}{3} - \binom{n-1}{3} = (n-1)^2.$$

5. Gegeben sind die vier Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene durch P_2, P_3 und P_4 in parameterfreier Form und berechnen Sie den Abstand des Punktes P_1 von dieser Ebene (inkl. Fußpunkt). Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks $P_2P_3P_4$?

6. Gegeben ist die Ebene E durch die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix},$$

sowie die Ebene F durch den Punkt

$$R = \begin{pmatrix} 13 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix},$$

und durch die Gerade

$$g: X = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Geben Sie die beiden Ebenen E und F parameterfrei an!
- (b) In welchem Punkt durchstößt die Gerade g die Ebene E ?
- (c) In welchem Winkel schneidet die Gerade g die Ebene E ?
- (d) Wie lautet die Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen E und F ?

7. Die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ z_A \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ y_B \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x_D \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

sind die Eckpunkte eines Parallelogramms, das in der Ebene $\varepsilon : x - y + z = 10$ liegt. Berechnen Sie die fehlenden Koordinaten der Punkte A, B, D sowie die Koordinaten des Punktes C . Errichten Sie über dem Parallelogramm als Grundfläche eine gerade Pyramide von der Höhe $h = 4\sqrt{3}$. Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S (zwei Lösungen!) und das Volumen der Pyramide!