

KOMBINATORIK

Stephan Wagner

Version: Dezember 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Elementare Zählaufgaben	4
1.1	Grundlegende Zählformeln	4
1.2	Aufgaben	7
2	Eigenschaften von Binomialkoeffizienten, kombinatorische Identitäten	9
2.1	Die Rekursion der Binomialkoeffizienten	9
2.2	Der binomische Lehrsatz und seine Anwendungen	10
2.3	Abzählen durch Bijektionen und die Catalanzahlen	15
2.4	Weitere Aufgaben	16
3	Das Inklusions-Exklusions-Prinzip	18
3.1	Erste Beispiele	18
3.2	Die allgemeine Form	19
3.3	Anwendungen	21
3.4	Weitere Beispiele	23
4	Abzählen durch Aufstellen von Rekursionen	24
4.1	Ein erstes Beispiel	24
4.2	Aufstellen und Lösen linearer Rekursionen	25
4.3	Erzeugende Funktionen	29
4.4	Weitere Aufgaben	36
5	Das Schubfachschlussprinzip	38
5.1	Formulierung des Prinzips und ein erstes Beispiel	38
5.2	Verschiedene Anwendungsbereiche	38
5.3	Weitere Aufgaben	41
6	Potentiale und Invarianten	43
6.1	Invarianten	43
6.2	Potentiale	48
6.3	Weitere Aufgaben	49

7	Einige Konzepte der Graphentheorie	51
7.1	Definitionen	51
7.2	Euler- und Hamiltonkreise	52
7.3	Ebene Graphen und die Eulersche Polyederformel	55
7.4	Ramsey-Zahlen	56
7.5	Weitere Aufgaben	57
8	Vermischtes	59
8.1	Induktionsbeweise in der Kombinatorik	59
8.2	Kombinatorische Geometrie	61
8.3	Mathematische Spiele	62
8.4	Das Prinzip des doppelten Abzählens	64
8.5	Weitere Aufgaben	66

Vorwort

Dieses Skriptum ist für fortgeschrittene Teilnehmer an der Mathematikolympiade sowie deren Kursleiter gedacht. Gewisse Inhalte, vor allem Kapitel 1, aber vielleicht auch Kapitel 5, Kapitel 8.1 oder Kapitel 8.3, sind grundsätzlich für Anfänger geeignet, aber kein Anfängerstoff.

Manche Kapitel sind vielleicht umfangreicher als es zu Bewerbungszwecken notwendig wäre – so sind etwa die Inhalte von Kapitel 2, die nach Korollar 2.4 folgen, ebenso in erster Linie für besonders interessierte Schüler gedacht wie die Ausführungen über erzeugende Funktionen in Kapitel 4.3. Auch zum Thema Graphentheorie (Kapitel 7) ist zu sagen, dass ein grundsätzliches Verständnis des Konzepts für das Lösen von Bewerbungsaufgaben wesentlich wichtiger ist als die dargelegte Theorie, die dafür meist nicht erforderlich ist.

Ich bemühe mich, dieses Skriptum stetig zu verbessern, und freue mich über alle Kommentare, die dazu beitragen – meine Mailadresse für jegliche Vorschläge, Wünsche, Beschwerden etc. lautet wagner@finanz.math.tugraz.at. Ich wünsche allen Verwendern dieses Skriptums viel Erfolg beim Ergründen der Geheimnisse der Kombinatorik.

Kapitel 1

Elementare Zählaufgaben

1.1 Grundlegende Zählformeln

Auswählen einer Folge von Elementen aus einer Grundmenge (Variationen mit Wiederholung)

Satz 1.1 *Es gibt n^k verschiedene Folgen, die aus Elementen einer Menge mit n Elementen gebildet werden können (wobei ein Element an mehreren verschiedenen Stellen auftreten darf).*

Beweis: Da man für jedes Glied der Folge dieselben Auswahlmöglichkeiten (nämlich genau n verschiedene) hat, gibt es

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ mal}} = n^k$$

verschiedene Möglichkeiten. □

BEISPIEL: Gibt man ein „Alphabet“ von n Buchstaben vor, so lassen sich genau n^k k -buchstabile Wörter bilden. Zum Beispiel gibt es 8 dreibuchstabile Wörter (die natürlich nicht alle sinnvoll sind) aus den Buchstaben S und O :

SSS, SSO, SOS, OSS, SOO, OSO, OOS, OOO.

Die Anzahl der 100-buchstabigen Wörter, die man aus dem Alphabet A,C,G,T bilden kann, ist 4^{100} , eine 61-stellige Zahl; DNA-Stränge, die in Zellkernen von Lebewesen vorkommen, sind freilich noch bedeutend länger...

Anordnung von Elementen einer Menge (Permutationen)

Satz 1.2 *Die Anzahl der Möglichkeiten, n Gegenstände in einer Reihe anzuordnen, ist*

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Beweis: Man hat offenbar n Möglichkeiten, den Gegenstand auszuwählen, der an erster Stelle steht. Im Gegensatz zum vorherigen Satz hat man für die weiteren Gegenstände nun aber weniger Möglichkeiten. Nachdem man den ersten gewählt hat, bleiben noch $(n - 1)$ mögliche Gegenstände für die zweite Position übrig, anschließend $(n - 2)$ für die dritte, etc. Damit ergibt sich genau die oben genannte Formel. \square

BEISPIEL: Offenbar gibt es $6 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ Möglichkeiten, die Buchstaben Ö, M, O in einer Reihe anzuordnen:

ÖMO, ÖOM, MÖO, OÖM, MOÖ, OMÖ.

BEMERKUNG: $n!$ (sprich: „ n Faktorielle“, „ n Fakultät“) erfüllt aufgrund der Definition die Gleichung $n! = n \cdot (n - 1)!$. Diese bleibt richtig, wenn man $0! = 1$ definiert (salopp gesprochen: es gibt genau eine Möglichkeit, 0 Gegenstände anzuordnen, nämlich gar nichts zu tun)

Aufgabe 1 Auf wie viele Arten kann man 8 Türme derart auf einem gewöhnlichen 8×8 -Schachbrett unterbringen, dass keine zwei von ihnen in derselben Linie oder Reihe stehen?

Lösung: Wir denken uns das Schachbrett mit Koordinaten a-h bzw. 1-8 versehen. Eine zulässige Anordnung wäre dann etwa a3, b5, c1, d8, e6, f2, g4, h7. Allgemein muss in jeder Linie von a bis h jeweils genau ein Turm stehen, weil sonst zwei in derselben Linie zu stehen kommen würden. Ebenso steht in jeder Reihe von 1 bis 8 jeweils genau ein Turm. Jeder Möglichkeit, die Zahlen von 1 bis 8 anzuordnen entspricht genau eine zulässige Aufstellung (im obigen Fall wäre dies die Anordnung 3-5-1-8-6-2-4-7), es gibt also genau $8! = 40320$ Möglichkeiten. \square

Anordnung der Elemente einer Teilmenge (Variationen ohne Wiederholung)

Satz 1.3 Die Anzahl der Möglichkeiten, k Gegenstände aus einer vorgegebenen Menge von n Gegenständen auszuwählen und in einer Reihe anzuordnen, ist

$$n^{\underline{k}} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Beweis: Der Beweis verläuft im Wesentlichen gleich wie für Satz 1.2: für den ersten Gegenstand der Reihe gibt es n Möglichkeiten, für den zweiten $n - 1$, etc. Für den letzten sind noch genau $n - k + 1$ Möglichkeiten übrig. \square

Auswählen einer Teilmenge (Kombinationen ohne Wiederholung)

Satz 1.4 Die Anzahl der Möglichkeiten, k Gegenstände aus einer vorgegebenen Menge von n Gegenständen auszuwählen (ohne Rücksicht auf die Reihenfolge), ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Beweis: Es sei x die gesuchte Anzahl. Hat man die k Gegenstände ausgewählt, so hat man anschließend nach Satz 1.2 $k!$ Möglichkeiten, diese anzuordnen. Also beschreibt $x \cdot k!$ die Anzahl der Möglichkeiten, k Gegenstände zu wählen und in einer Reihe anzuordnen. Nach Satz 1.3 muss daher

$$x \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

gelten, woraus sich x unmittelbar ergibt. Variationen und Kombinationen ohne Wiederholung unterscheiden sich nur dadurch, dass die Reihenfolge bei Variationen eine Rolle spielt, bei Kombinationen nicht. Jede Kombination entspricht genau $k!$ Variationen, und somit unterscheiden sich die Anzahlen auch um einen Faktor von $k!$. \square

BEMERKUNG: Offenbar ist die angegebene Formel nur sinnvoll, wenn $0 \leq k \leq n$ gilt. Dies ist grundsätzlich auch eine einleuchtende Einschränkung, denn weniger als 0 oder mehr als n Elemente können ja nicht ausgewählt werden. Für viele Zwecke ist es aber günstig, zusätzlich $\binom{n}{k} = 0$ zu definieren, wenn n, k ganze Zahlen und $k < 0$ oder $k > n$ gilt. Später wird eine noch allgemeinere Definition angegeben.

BEISPIEL: Die Anzahl möglicher „Sechser“ beim Lotto 6 aus 45 beträgt

$$\binom{45}{6} = \frac{45!}{6! \cdot 39!} = 8145060.$$

BEMERKUNG: Eine offensichtliche Eigenschaft von $\binom{n}{k}$ (Binomialkoeffizient, sprich „ n über k “) ist die Gleichung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

die man durch Einsetzen sofort erhält. Dies kann man jedoch auch leicht direkt sehen: die Auswahl einer Menge von k Gegenständen entspricht genau der Auswahl der $n - k$ Gegenstände, die *nicht* dazugehören sollen. Die Verallgemeinerung dieses Prinzips führt uns auf den sogenannten *Multinomialkoeffizienten*.

Aufteilung einer Menge in Gruppen – der Multinomialkoeffizient

Satz 1.5 Die Anzahl der Möglichkeiten, die n Elemente einer Menge M in Gruppen M_1, M_2, \dots, M_r mit vorgegebenen Größen k_1, k_2, \dots, k_r aufzuteilen (wobei $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ sein muss), beträgt

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!} \quad (k_i \geq 0).$$

Beweis: Man kann die n Elemente auf folgende Weise in einer Reihe anordnen: zunächst teilt man sie wie angegeben in Gruppen auf. Die Elemente der Gruppe M_1 sollen die Plätze 1 bis k_1 einnehmen, die Elemente der Gruppe M_2 die Plätze $k_1 + 1$ bis $k_1 + k_2$, etc. Die Elemente der einzelnen Gruppen M_i können dann noch auf jeweils $k_i!$ Arten angeordnet

werden. Auf diese Weise lassen sich alle möglichen Anordnungen erzeugen. Ist also x die gesuchte Anzahl, dann muss nach Satz 1.2

$$x \cdot k_1! \cdot k_2! \dots k_r! = n!$$

gelten, woraus der Satz bereits folgt. \square

Auswählen einer Multimenge von Elementen aus einer Grundmenge (Kombinationen mit Wiederholung)

Satz 1.6 Die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge mit n Elementen k auszuwählen, wobei man die Elemente auch mehrfach wählen darf, beträgt $\binom{n+k-1}{k}$.

Beweis: Es seien X_1, X_2, \dots, X_n die Elemente der Menge. Eine Auswahl ist dadurch charakterisiert, dass X_1 l_1 -mal gewählt wird, X_2 l_2 -mal, etc. Zusammengenommen muss

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n = k$$

gelten. Gesucht ist also die Anzahl der n -tupel nichtnegativer ganzer Zahlen, für die diese Gleichung gilt. Ebenso kann man aber auch $m_i = l_i + 1$ setzen und nach der Anzahl positiver Lösungen für

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = k + n$$

fragen. Stellen wir uns $k + n$ Punkte in einer Reihe vor, so entspricht jede solche Lösung einer Aufteilung in n Gruppen, die der Reihe nach m_1, m_2, \dots Punkte enthalten. Dies ist äquivalent zur Auswahl von $n - 1$ Trennstrichen, für die es $k + n - 1$ mögliche Positionen gibt. Die gesuchte Anzahl ist somit

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

\square

1.2 Aufgaben

Aufgabe 2 Wie viele Kombinationen gibt es bei Lotto 6 aus 45, bei denen zwei aufeinanderfolgende Zahlen vorkommen?

Aufgabe 3 Von den 25 Rittern der Tafelrunde werden drei ausgewählt, um einen furchtbaren Drachen zu bekämpfen. Wie viele Möglichkeiten hat man, wenn keine zwei von ihnen nebeneinander sitzen sollen?

Aufgabe 4 Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit den Buchstaben A,B,C,D,E,F,G,H Wörter der Länge 4 zu bilden, sodass kein Buchstabe doppelt vorkommt?

Aufgabe 5 Auf wieviele Arten kann man die Buchstaben des Wortes MATHEMATIK anordnen?

Aufgabe 6 Auf wie viele Arten kann man aus n Damen und n Herren bei einem Ball Paare bilden?

Kapitel 2

Eigenschaften von Binomialkoeffizienten, kombinatorische Identitäten

Es wurde bereits erwähnt, dass $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ gilt. Dies ist nur eine von vielen Identitäten, die die Binomialkoeffizienten erfüllen. Einige davon seien hier kurz vorgestellt – unter anderem deshalb, weil manche Beweise sehr instruktiv sind und die dabei vorkommenden Methoden immer wieder verwendet werden können.

2.1 Die Rekursion der Binomialkoeffizienten

Satz 2.1 *Die Binomialkoeffizienten erfüllen die Rekursionsgleichung*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad (0 \leq k \leq n).$$

Beweis: Rechnerisch lässt sich die Gleichung folgendermaßen beweisen:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{k \cdot (n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k) \cdot (n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Andererseits kann man auch so argumentieren: es sei X irgendein Gegenstand aus einer Menge M mit n Elementen. Wenn man aus M k Elemente auswählen will, so kann man sich zunächst entscheiden, ob X dabei sein soll oder nicht. Im ersten Fall hat man aus den verbliebenen $n-1$ Gegenständen noch $k-1$ auszuwählen ($\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten), im

zweiten Fall noch k ($\binom{n-1}{k}$ Möglichkeiten). Damit folgt sofort die Gleichung

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

□

Man beachte, dass die Gleichung richtig bleibt, wenn man für $k > n$ oder $k < 0$ jeweils $\binom{n}{k} = 0$ setzt. Anschaulich wird die Rekursion, indem man die Werte $\binom{n}{k}$ im sogenannten *Pascalschen Dreieck* darstellt – die n -te Zeile wird dabei aus den Werten $\binom{n}{k}$ ($0 \leq k \leq n$) gebildet:

					1					
					1		1			
				1	2	1				
			1	3	3	1				
		1	4	6	4	1				
	1	5	10	10	5	1				
	1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		

Man erkennt deutlich, dass jede Zahl die Summe der beiden darüberliegenden ist. Es ist außerdem möglich, $\binom{\alpha}{k}$ für beliebige reelle Zahlen α zu definieren, und zwar mittels

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Satz 2.1 bleibt auch mit dieser Definition richtig.

2.2 Der binomische Lehrsatz und seine Anwendungen

Sicher einer der wichtigsten Sätze im Zusammenhang mit Binomialkoeffizienten ist der *Binomische Lehrsatz*:

Satz 2.2 (Binomischer Lehrsatz) Für alle ganzen Zahlen $n \geq 0$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beweis: Wir beweisen dies mittels vollständiger Induktion: für $n = 0$ ist die linke Seite $(x+y)^0 = 1$, die rechte Seite $\binom{0}{0}x^0y^0 = 1$. Die Aussage stimmt daher in diesem Fall. Nehmen wir nun an, sie gelte für ein gewisses n . Dann folgt unter Zuhilfenahme der Definition $\binom{n}{n+1} = \binom{n}{-1} = 0$ und Satz 2.1

$$(x+y)^{n+1} = (x+y) \cdot (x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k},
\end{aligned}$$

die Aussage gilt also auch für $n+1$. Damit ist die Induktion beendet.

Anschaulich kann man auch folgendermaßen argumentieren: beim Ausmultiplizieren entstehen alle möglichen Produkte aus x und y , die sich durch Auswahl eines der Summanden aus jedem der Faktoren ergeben. Das Produkt $x^k y^{n-k}$ ergibt sich genau dann, wenn aus k Faktoren das x und aus den restlichen $n-k$ Faktoren das y ausgewählt wird. Gemäß Satz 1.4 gibt es dafür genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, man erhält also beim Ausmultiplizieren den Ausdruck $x^k y^{n-k}$ genau $\binom{n}{k}$ Mal. \square

BEMERKUNG: An dieser Stelle sei erwähnt, dass gewöhnlich $0^0 = 1$ gesetzt wird, womit der binomische Lehrsatz auch für $y = 0$ (und/oder $x = 0$) richtig bleibt.

Aus dem binomischen Lehrsatz lassen sich leicht verschiedene Identitäten gewinnen, insbesondere die folgenden Gleichungen:

Satz 2.3 *Es gelten die folgenden Formeln für Summen von Binomialkoeffizienten:*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

für $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

für $n > 0$,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^n \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^n \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

für $n > 0$.

Beweis: Die erste Gleichung ergibt sich, indem man im Binomischen Lehrsatz $x = y = 1$ einsetzt, die zweite für $x = 1$ und $y = -1$. Die dritte Gleichung erhält man, indem man die beiden ersten addiert bzw. subtrahiert und bemerkt, dass

$$1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & k \text{ gerade} \\ 0 & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad 1 - (-1)^k = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ 2 & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

gilt. □

Die erste Gleichung lässt folgende Deutung zu: da $\binom{n}{k}$ genau die Anzahl der Teilmengen einer n -elementigen Menge mit genau k Elementen angibt, ist die Summe auf der linken Seite genau die Anzahl aller Teilmengen einer n -elementigen Teilmenge. Wir erhalten also

Korollar 2.4 Eine n -elementige Teilmenge hat genau 2^n verschiedene Teilmengen.

BEISPIEL: Die Menge $\{\ddot{O}, M, O\}$ hat die 8 Teilmengen

$$\emptyset = \{\}, \{\ddot{O}\}, \{M\}, \{O\}, \{\ddot{O}, M\}, \{\ddot{O}, O\}, \{M, O\}, \{\ddot{O}, M, O\}.$$

BEMERKUNG: Korollar 2.4 kann man natürlich auch ohne Verwendung des binomischen Lehrsatzes erhalten. Beim Auswählen einer Teilmenge hat man für jedes der n Elemente zwei Möglichkeiten: es kann in der Teilmenge enthalten sein oder nicht. Daher ist die Anzahl möglicher Teilmengen genau $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$. Man kann aber aus Satz 2.3 etwa auch sofort folgern, dass es von einer endlichen, nicht leeren Menge genauso viele Teilmengen mit gerader Elementanzahl wie mit ungerader Elementanzahl gibt.

Aufgabe 7 Beweise für alle positiven ganzen Zahlen n :

$$\sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k} = \frac{1}{3} (2^{3n} + 2 \cdot (-1)^n).$$

Lösung: Wir würden nun gerne den Trick, der in der vorherigen Aufgabe zur Anwendung gekommen ist, verallgemeinern. An die Stelle der Potenzen von -1 (die abwechselnd 1 und -1 sind) müssen jedoch andere treten. Dazu seien $\zeta_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ die beiden dritten Einheitswurzeln, also $\zeta_1^3 = \zeta_2^3 = 1$. Dann gilt $\zeta_1 + \zeta_2 + 1 = 0$, $\zeta_1^2 = \zeta_2$ und $\zeta_2^2 = \zeta_1$. Wenn wir in den binomischen Lehrsatz jeweils $y = 1$ und x der Reihe nach $1, \zeta_1, \zeta_2$ setzen und die Gleichungen addieren, dann erhalten wir

$$\sum_{l=0}^{3n} \binom{3n}{l} (1 + \zeta_1^l + \zeta_2^l) = 2^{3n} + (1 + \zeta_1)^{3n} + (1 + \zeta_2)^{3n}.$$

Der Ausdruck $1 + \zeta_1^l + \zeta_2^l$ nimmt verschiedene Werte in Abhängigkeit von l an: für $l = 3k$ gilt

$$1 + \zeta_1^l + \zeta_2^l = 1 + 1^k + 1^k = 3,$$

für $l = 3k + 1$

$$1 + \zeta_1^l + \zeta_2^l = 1 + 1^k \zeta_1 + 1^k \zeta_2 = 1 + \zeta_1 + \zeta_2 = 0,$$

und für $l = 3k + 2$

$$1 + \zeta_1^l + \zeta_2^l = 1 + 1^k \zeta_2 + 1^k \zeta_1 = 1 + \zeta_2 + \zeta_1 = 0,$$

also

$$\sum_{k=0}^n 3 \binom{3n}{3k} = 2^{3n} + (1 + \zeta_1)^{3n} + (1 + \zeta_2)^{3n}.$$

Nun sind $1 + \zeta_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ jeweils sechste Einheitswurzeln, d.h. $(1 + \zeta_{1,2})^3 = -1$ und $(1 + \zeta_{1,2})^6 = 1$. Damit folgt sofort

$$\sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k} = \frac{1}{3} (2^{3n} + 2 \cdot (-1)^n).$$

□

Eine weitere bedeutsame Summenformel ist die folgende:

Satz 2.5 (Vandermonde-Identität) Für ganze Zahlen $N, M, n \geq 0$ gilt

$$\sum_{k=0}^n \binom{N}{k} \binom{M}{n-k} = \binom{N+M}{n}.$$

Beweis: Hat man es mit einem Summenausdruck der Form

$$\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

zu tun, so sollte man dabei stets an das Ausmultiplizieren von Polynomen denken. Hat man nämlich zwei Polynome $A(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$ und $B(x) = \sum_{l=0}^M b_l x^l$ gegeben, so ergibt sich für das Produkt der Polynome nach dem Distributivgesetz

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M a_k b_l x^{k+l}$$

Der Koeffizient von x^n ergibt sich dann aus jenen Summanden, für die $k + l = n$, also $l = n - k$ ist. Besagter Koeffizient ist somit gleich

$$\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

wobei wir $a_k = 0$ setzen, falls der Grad N des Polynoms A kleiner als k ist (und ebenso $b_l = 0$, falls $l > M$). Dieselbe Argumentation wird auch in Kapitel 4.3 verwendet.

In unserem konkreten Fall lässt sich das Problem lösen, indem man den binomischen Lehrsatz auf das Polynom $(1+x)^{N+M}$ anwendet, das sich auch als Produkt von $(1+x)^N$ und $(1+x)^M$ schreiben lässt:

$$\begin{aligned} (1+x)^{N+M} &= (1+x)^N \cdot (1+x)^M = \left(\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} x^k \right) \left(\sum_{l=0}^M \binom{M}{l} x^l \right) \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M \binom{N}{k} \binom{M}{l} x^{k+l} = \sum_{n=0}^{N+M} \sum_{k=0}^n \binom{N}{k} \binom{M}{n-k} x^n. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit

$$(1+x)^{N+M} = \sum_{n=0}^{N+M} \binom{N+M}{n} x^n$$

ergibt sich die gewünschte Identität.

Auch diese lässt sich jedoch durch ein einfaches Abzählargument beweisen: eine Menge mit $N+M$ Elementen wird zunächst in zwei Teile mit N bzw. M Elementen aufgeteilt. Will man nun n Elemente auswählen, so kann man das dadurch erreichen, dass man zunächst k Elemente ($k \leq n$) aus dem ersten Teil und anschließend die verbliebenen $n-k$ Elemente aus dem zweiten Teil wählt. Zu jedem k gibt es dann offenbar $\binom{N}{k} \binom{M}{n-k}$ Möglichkeiten. Durch Summation erhalten wir obigen Summenausdruck für $\binom{N+M}{n}$. \square

Der folgende Spezialfall der Vandermonde-Identität ist bemerkenswert:

Korollar 2.6

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

Aufgabe 8 Zeige, dass die folgende Identität gilt:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2 = \begin{cases} (-1)^{n/2} \binom{n}{n/2} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Lösung: Wir führen wiederum einen Koeffizientenvergleich durch, und zwar in der Gleichung

$$\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^{n-k} \right) \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k \right) = (1+x)^n (1-x)^n = (1-x^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x^2)^k.$$

Der Koeffizient von x^n auf der rechten Seite ist tatsächlich $(-1)^{n/2} \binom{n}{n/2}$, falls n gerade ist, und andernfalls 0. Der Koeffizient auf der linken Seite, der sich beim Ausmultiplizieren ergibt, lautet dagegen

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \cdot (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2.$$

\square

2.3 Abzählen durch Bijektionen und die Catalanzahlen

Zahlreiche Zählaufgaben führen auf die sogenannten *Catalanzahlen*, die im Folgenden kurz vorgestellt werden, um einige kombinatorische Ideen zu illustrieren. Zunächst betrachten wir das Pascalsche Dreieck einmal genau: diejenigen Zahlen, die genau in der Mittelsenkrechten stehen, nämlich $1, 2, 6, 20, 70, 252, \dots$, die durch die Formel $\binom{2n}{n}$ beschrieben werden, haben offenbar die folgende bemerkenswerte Eigenschaft: sie sind der Reihe nach durch $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ teilbar! Mit anderen Worten ist der Ausdruck

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

stets eine ganze Zahl, was a priori keineswegs klar ist. Es ist eine gute Übung, dies mit Hilfe von rein zahlentheoretischen Methoden nachzuweisen.

Wir widmen uns nun aber der Interpretation der solchermaßen definierten Folge $1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots$ und betrachten dazu folgende Aufgabenstellung:

Aufgabe 9 20 Personen warten in einer Schlange vor der Kinokasse, um jeweils eine Karte zu 5 Euro zu kaufen. 10 Personen haben als einziges Zahlungsmittel einen 5-Euro-Schein bei sich, 10 Personen einen 10-Euro-Schein. Die Kinokasse ist zu Beginn leer. Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es für die 20 Personen, bei denen für jede immer genügend Wechselgeld vorhanden ist?

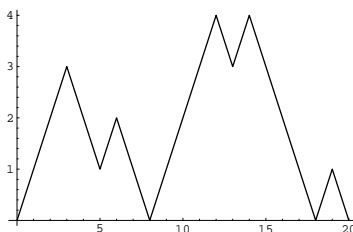


Abbildung 2.1: Diagramm des Wechselgeldstandes.

Lösung: Wir stellen uns ein Diagramm vor, bei dem der Wechselgeldstand nach jeder Person dargestellt wird. Kommt eine Person mit einem 5-Euro-Schein, dann wächst der Wechselgeldstand um 1. Bei einer Person mit einem 10-Euro-Schein fällt er um 1. Es gibt genau dann keine Wechselgeldprobleme, wenn der Stand niemals unter 0 fällt. Das Diagramm bildet dann eine Art „Bergkette“ aus Auf- und Abwärtsstrichen (Abbildung 2.1).

Fügen wir am Beginn jeweils noch einen weiteren Aufwärtsstrich an und hängen mehrere Kopien aneinander, dann erhalten wir ein periodisches Muster, das an den Anfügestellen jeweils den tiefsten Punkt hat (Abbildung 2.2). Umgekehrt kann man jedem solchen periodischen Muster, das aus 11 Strichen nach oben und 10 Strichen nach unten je Periode

besteht, eine Bergkette zuordnen. Dazu wählt man eine Gerade mit der Steigung $\frac{1}{21}$, die man nach oben parallel verschiebt bis sich der erste Kontakt ergibt, wie in Abbildung 2.2 gezeigt. Von den 21 Strichen zwischen zwei Berührungspunkten (da die Steigung $\frac{1}{21}$ beträgt, kann es nur alle 21 Striche eine Berührung geben, denn die Berührungspunkte haben ganzzahlige Koordinaten) bilden die letzten 20 die zugeordnete Bergkette.

Wir haben somit eine *Bijektion* zwischen Bergketten und periodischen Mustern gefunden, also eine 1 – 1-Abbildung, die jeder Bergkette genau ein Muster zuordnet und umgekehrt. Damit ist klar, dass die Anzahl beider gleich sein muss.

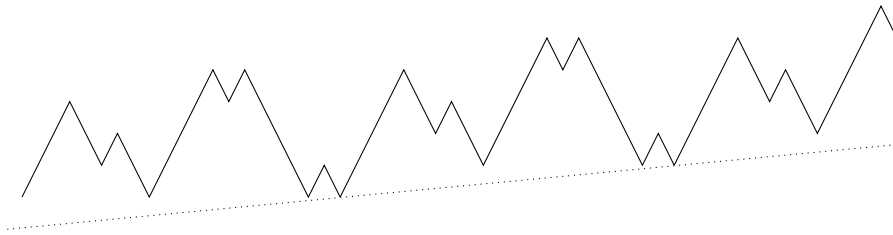


Abbildung 2.2: Das zugehörige periodische Muster.

Es gibt $\binom{21}{10}$ verschiedene mögliche Perioden für ein solches Muster (entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, die Positionen der 10 Abwärtsstriche auszuwählen). Andererseits hat jedes Muster 21 verschiedene Perioden (beginnend mit dem ersten, zweiten, ..., 21-ten Strich), daher gibt es

$$\frac{1}{21} \binom{21}{10} = \frac{1}{21} \cdot \frac{21!}{10!11!} = \frac{20!}{10!11!} = \frac{1}{11} \binom{20}{10}$$

verschiedene Anordnungen.

Wenn man es allgemein mit $2n$ Personen zu tun hat, dann ergeben sich die sogenannten Catalanzahlen $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, die auch eine bestimmte Rekursionsgleichung erfüllen. Wir werden ihnen in Kapitel 4.3 wieder begegnen.

2.4 Weitere Aufgaben

Aufgabe 10 Beweise die Identität

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} = 3^n.$$

Aufgabe 11 Wie viele Wörter der Länge n kann man aus den Buchstaben A,B,C bilden, bei denen die Anzahl der A's gerade ist?

Aufgabe 12 Eine Spielfigur steht in der linken unteren Ecke eines $n \times n$ -Quadrats. In jedem Zug darf sie nach oben oder nach rechts gezogen werden. Wie viele mögliche Zugfolgen gibt es, die in der rechten oberen Ecke enden?

Aufgabe 13 (IMO 1981) Es sei $1 \leq r \leq n$. Wir betrachten alle r -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$. Jede von ihnen hat ein Minimum. Zeige, dass der Durchschnitt aller dieser Minima gleich $\frac{n+1}{r+1}$ ist.

Aufgabe 14 (IMO Shortlist 2002) Es sei n eine positive ganze Zahl. Eine Folge von n positiven ganzen Zahlen (nicht notwendig verschieden) heißt *komplett*, wenn es die folgende Bedingung erfüllt: für jede positive ganze Zahl $k > 1$ kommt die Zahl $k - 1$ jedenfalls in der Folge vor, sofern k vorkommt, und das noch vor dem letzten Auftreten von k . Wie viele komplette Folgen der Länge n gibt es?

Kapitel 3

Das Inklusions-Exklusions-Prinzip

3.1 Erste Beispiele

Oft steht man vor dem Problem, etwa die Größe der Vereinigungsmenge zweier Mengen A und B bestimmen zu wollen, wobei dies jedoch nicht direkt möglich ist. Das folgende Beispiel soll illustrieren, wie eine solche Problemstellung aussehen kann:

Aufgabe 15 Alle SchülerInnen der 6a-Klasse des Realgymnasiums Raach-Bundesheimstraße besuchen zumindest einen Olympiadekurs; 20 besuchen den Kurs der Mathematikolympiade, 15 jenen der Physikolympiade und 10 beide Kurse. Wie viele SchülerInnen hat die 6a-Klasse?

Lösung: Es sei M die Menge jener SchülerInnen, die an der Mathematikolympiade teilnehmen, und P die Menge jener, die an der Physikolympiade teilnehmen. Die Gesamtmenge aller SchülerInnen ist dann die Vereinigungsmenge $S = M \cup P$. Wenn man die Anzahl aller SchülerInnen bestimmt, so hat man zur Größe der Menge M die Größe der Menge P zu addieren. Dabei werden aber all jene doppelt gezählt, die sowohl zu M als auch zu P gehören. Deren Anzahl muss also noch abgezogen werden. Formal bedeutet das

$$|M \cup P| = |M| + |P| - |M \cap P|.$$

In diesem Fall setzen wir die vorgegebenen Werte ein und erhalten für die Gesamtzahl $20 + 15 - 10 = 25$. □

Das Prinzip, dass doppelt gezählte Mengenelemente wieder abgezogen werden, lässt sich auch noch weiter verallgemeinern. Ehe wir zu einer allgemeinen Version kommen, erweitern wir noch das vorige Beispiel:

Aufgabe 16 Die SchülerInnen der 7a-Klasse haben auch die Möglichkeit, die Chemieolympiade zu besuchen. Auch hier nehmen alle an mindestens einer Olympiade teil. Eine Erhebung zeigt, dass 22 SchülerInnen die Mathematik-, 13 die Physik- und 15 die Chemieolympiade besuchen. Weiters ist bekannt, dass 8 SchülerInnen Mathematik und Physik, 7

Mathematik und Chemie und 6 Physik und Chemie betreiben. 3 besonders Eifrige sind in allen drei Olympiadekursen anzutreffen. Wie viele SchülerInnen hat die 7a-Klasse?

Lösung: Wir bezeichnen die Mengen der Mathematik-, Physik- und Chemieolympiadebesucher mit M, P, C . Wieder suchen wir nach der Größe der Vereinigungsmenge $M \cup P \cup C$. Dazu addieren wir die Größen von M, P und C . SchülerInnen, die Mathematik- und Physikolympiade besuchen, werden doppelt gezählt, also haben wir $|M \cap P|$ abzuziehen. Gleiches gilt für $|M \cap C|$ und $|P \cap C|$. Nun wurden aber SchülerInnen, die an allen drei Olympiaden teilnehmen, dreifach gezählt und dreifach wieder abgezogen. Daher müssen wir $|M \cap P \cap C|$ wieder dazuaddieren. Formal gilt also

$$|M \cup P \cup C| = |M| + |P| + |C| - |M \cap P| - |M \cap C| - |P \cap C| + |M \cap P \cap C|.$$

Die 7a-Klasse hat also $22 + 13 + 15 - 8 - 7 - 6 + 3 = 32$ SchülerInnen. \square

3.2 Die allgemeine Form

Nachdem die beiden ersten Beispiele schon ein allgemeines Prinzip vermuten lassen, wollen wir dieses nun formulieren und beweisen.

Satz 3.1 (Inklusions-Exklusionsprinzip) *Es seien M_1, M_2, \dots, M_k beliebige Mengen. Weiters bezeichnen wir für eine Menge $I \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ mit $\bigcap_{i \in I} M_i$ den Durchschnitt aller Mengen M_i mit $i \in I$. Dann gilt*

$$\left| \bigcup_{i=1}^k M_i \right| = \sum_{l=1}^k \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |I|=l}} (-1)^{l-1} \left| \bigcap_{i \in I} M_i \right|, \quad (3.1)$$

wobei die zweite Summe über alle Teilmengen I von $\{1, \dots, k\}$ mit l Elementen läuft.

BEMERKUNG: Die Fälle $k = 2$ und $k = 3$ wurden in den beiden Beispielen bereits gezeigt. Die Schreibweise in Gleichung (3.1) mag dabei ungewohnt sein, ist aber leicht erklärt: für $k = 3$ etwa bildet man alle Teilmengen I der Größe l ($1 \leq l \leq k$) aus der Grundmenge $\{1, 2, 3\}$ und bildet jeweils den Durchschnitt der entsprechenden M_i , also

- $l = 1$: M_1 (zu $I = \{1\}$), M_2 ($I = \{2\}$), M_3 ($I = \{3\}$),
- $l = 2$: $M_1 \cap M_2$ ($I = \{1, 2\}$), $M_1 \cap M_3$ ($I = \{1, 3\}$), $M_2 \cap M_3$ ($I = \{2, 3\}$),
- $l = 3$: $M_1 \cap M_2 \cap M_3$ ($I = \{1, 2, 3\}$).

Damit erhält man die Formel

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|,$$

die bereits in Aufgabe 16 gezeigt wurde. Eine alternative Schreibweise für Gleichung (3.1) ist

$$\left| \bigcup_{i=1}^k M_i \right| = \sum_{l=1}^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n} (-1)^{l-1} \left| \bigcap_{j=1}^l M_{i_j} \right|,$$

bei der die Elemente von I mit i_1, i_2, \dots, i_l bezeichnet werden. Es wird über alle i_1, \dots, i_l summiert, die die Bedingung $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n$ erfüllen, was genau den Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$ der Größe l entspricht.

Beweis: Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach k . Für $k = 1$ haben wir die Identität $|M_1| = |M_1|$ vor uns, die offensichtlich gilt. Für den Induktionsschritt führen wir die folgenden Umformungen durch, wobei wir den Fall $k = 2$ aus dem ersten Beispiel verwenden:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^{k+1} M_i \right| &= \left| \left(\bigcup_{i=1}^k M_i \right) \cup M_{k+1} \right| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^k M_i \right| + |M_{k+1}| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^k M_i \right) \cap M_{k+1} \right| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^k M_i \right| + |M_{k+1}| - \left| \bigcup_{i=1}^k (M_i \cap M_{k+1}) \right| \\ &= \sum_{l=1}^k \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |I|=l}} (-1)^{l-1} \left| \bigcap_{i \in I} M_i \right| + |M_{k+1}| - \sum_{l=1}^k \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |I|=l}} (-1)^{l-1} \left| \bigcap_{i \in I} (M_i \cap M_{k+1}) \right| \\ &= \sum_{l=1}^k \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |I|=l}} (-1)^{l-1} \left| \bigcap_{i \in I} M_i \right| + |M_{k+1}| - \sum_{l=1}^k \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |I|=l}} (-1)^{l-1} \left| \bigcap_{i \in I \cup \{k+1\}} M_i \right| \\ &= \sum_{l=1}^k \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k+1\} \\ |I|=l, k+1 \notin I}} (-1)^{l-1} \left| \bigcap_{i \in I} M_i \right| + \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k+1\} \\ |I|=l, k+1 \in I}} (-1)^{l-1} \left| \bigcap_{i \in I} M_i \right| \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k+1\} \\ |I|=l}} (-1)^{l-1} \left| \bigcap_{i \in I} M_i \right|. \end{aligned}$$

Damit ist die Induktion beendet. □

BEMERKUNG: Eine analoge Formel gilt auch, wenn man Vereinigung und Durchschnitt vertauscht (Beweis analog):

$$\left| \bigcap_{i=1}^k M_i \right| = \sum_{l=1}^k \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |I|=l}} (-1)^{l-1} \left| \bigcup_{i \in I} M_i \right|. \quad (3.2)$$

Weiters kommt es häufig vor, dass die M_i Teilmengen einer Grundmenge M sind und man sich für die Anzahl der Elemente interessiert, die in keinem der M_i oder nicht in allen M_i liegen. In ersterem Fall hat man die Mächtigkeit von $M \setminus (M_1 \cup M_2 \dots \cup M_k)$ zu bestimmen, was gemäß der Formel gleich

$$|M| - \sum_{l=1}^k \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |I|=l}} (-1)^{l-1} \left| \bigcap_{i \in I} M_i \right| \quad (3.3)$$

ist. Im anderen Fall ergibt sich für die Mächtigkeit von $M \setminus (M_1 \cap M_2 \dots \cap M_k)$

$$|M| - \sum_{l=1}^k \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |I|=l}} (-1)^{l-1} \left| \bigcup_{i \in I} M_i \right|. \quad (3.4)$$

Natürlich sind die Größen der Mengen $\bigcap_{i \in I} M_i$ nicht immer so explizit gegeben wie dies in den beiden ersten Beispielen der Fall war; oft lassen sie sich jedoch einfacher bestimmen als die eigentlich gesuchten Werte. Dies soll im folgenden Abschnitt gezeigt werden.

3.3 Anwendungen

Aufgabe 17 Wie viele n -stellige natürliche Zahlen gibt es, die die Ziffern 0, 1, 2 nicht, die Ziffern 3, 4, 5 aber jedenfalls enthalten?

Lösung: Für die n Stellen kommen nur die Ziffern 3, 4, ..., 9 in Frage. Wir bezeichnen mit $M_n(Z)$ die Menge aller n -ziffrigen Zahlen, die aus der Ziffernmenge Z gebildet werden können. Dann suchen wir die Anzahl der Zahlen in $M_n(\{3, 4, \dots, 9\})$, die weder in $M_n(\{4, 5, \dots, 9\})$ noch in $M_n(\{3, 5, \dots, 9\})$ noch in $M_n(\{3, 4, 6, \dots, 9\})$ liegen. Nun beachten wir weiters zwei Dinge:

$$M_n(Z_1) \cap M_n(Z_2) = M_n(Z_1 \cap Z_2),$$

d.h. die Zahlen, die sowohl aus den Ziffern in Z_1 als auch aus den Ziffern in Z_2 bilden lassen, können nur Ziffern in $Z_1 \cap Z_2$ enthalten. Außerdem gilt $|M_n(Z)| = |Z|^n$ (falls $0 \notin Z$; andernfalls müsste man führende Nullen ausschließen), denn für jede der n Stellen hat man $|Z|$ Möglichkeiten. Daher erhalten wir aus obiger Formel

$$\begin{aligned} & |M_n(\{3, 4, \dots, 9\}) \setminus (M_n(\{4, 5, \dots, 9\}) \cup M_n(\{3, 5, \dots, 9\}) \cup M_n(\{3, 4, 6, \dots, 9\}))| \\ &= |M_n(\{3, 4, \dots, 9\})| - |M_n(\{4, 5, \dots, 9\})| - |M_n(\{3, 5, \dots, 9\})| - |M_n(\{3, 4, 6, \dots, 9\})| \\ &\quad + |M_n(\{5, 6, \dots, 9\})| + |M_n(\{4, 6, \dots, 9\})| + |M_n(\{3, 6, \dots, 9\})| - |M_n(\{6, 7, \dots, 9\})| \\ &= 7^n - 3 \cdot 6^n + 3 \cdot 5^n - 4^n. \end{aligned}$$

Ein klassisches Problem, bei dem das Inklusions-Exklusions-Prinzip Anwendung findet, kommt aus der Zahlentheorie: die *Eulersche φ -Funktion* $\varphi(n)$ bezeichnet die Anzahl der

zu n teilerfremden Zahlen $0 \leq x < n$ (teilerfremde Restklassen). Sind p_1, p_2, \dots, p_k die Primfaktoren von n , dann ist eine Zahl genau dann zu n teilerfremd, wenn sie weder durch p_1 noch durch p_2 etc. teilbar ist. Die Anzahl der Zahlen $< n$, die durch p_i teilbar sind, ist genau n/p_i . Ebenso ist die Anzahl der Zahlen, die durch alle p_i mit $i \in I$ (und damit durch $\prod_{i \in I} p_i$) teilbar sind, gleich $n/\prod_{i \in I} p_i$. Nach Formel (3.3) gilt somit

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n - \sum_{l=1}^k \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |I|=l}} (-1)^{l-1} \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} \\ &= n \cdot \sum_{l=0}^k \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |I|=l}} (-1)^l \prod_{i \in I} p_i^{-1} = n \cdot \prod_{l=0}^k \left(1 - \frac{1}{p_l}\right). \end{aligned}$$

Ein weiteres klassisches Beispiel ist die Herleitung für die Anzahl *fixpunktfreier Permutationen*. Eine von zahlreichen Geschichten, die den Begriff erläutert, ist die folgende:

Aufgabe 18 Ein zerstreuter Mathematiker hat n Briefe geschrieben, die er zuklebt, bevor er die Adressen auf die Umschläge geschrieben hat. Anschließend schreibt er die Adressen einfach zufällig auf die Umschläge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der Briefe richtig adressiert ist?

Lösung: Wir haben die Anzahl der möglichen Adressierungen zu bestimmen, bei denen kein Brief den richtigen Namen trägt. Die Anzahl aller möglichen Adressierungen ist klarerweise $n!$. Nun bestimmen wir die Anzahl der Adressierungen, bei denen eine gewisse Menge $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ von Briefen (die Briefe werden der Einfachheit halber mit $1, 2, \dots, n$ durchnummeriert) die richtige Adresse trägt.

Wenn $m = |I|$ Briefe richtig adressiert sind, dann bleiben noch $n-m$ Briefe übrig, für die es $(n-m)!$ Möglichkeiten zur Beschriftung gibt. Daher ist die Anzahl der Adressierungen, bei denen eine Menge I richtig adressiert wird, genau gleich $(n-|I|)!$. Es folgt nach Formel (3.3) für die gesuchte Anzahl

$$n! - \sum_{l=1}^n \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=l}} (-1)^{l-1} (n-l)!$$

Da es genau $\binom{n}{l} = \frac{n!}{l!(n-l)!}$ Teilmengen der Größe l gibt, vereinfacht sich dies zu

$$n! - \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} \frac{n!}{l!} = n! \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{l!}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass kein Brief richtig adressiert ist, beträgt damit

$$\sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{l!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \dots \pm \frac{1}{n!}$$

Dieser Wert nähert sich für große n an die unendliche Summe $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} = \frac{1}{e} = 0.367879$ an. \square

3.4 Weitere Beispiele

Aufgabe 19 Wie viele ganze Zahlen $1 \leq n \leq 10^{10}$ sind durch 2,3 oder 5 teilbar?

Aufgabe 20 Wie viele ganze Zahlen $1 \leq n \leq 10^{10}$ mit $\text{ggT}(n, 3000) = 3$ gibt es?

Aufgabe 21 Wie viele ganzen Zahlen $1 \leq n \leq 1000$ sind nicht durch die dritte Potenz einer ganzen Zahl teilbar?

Aufgabe 22 Wie viele Zahlen $1 \leq n \leq 10^{10}$ gibt es, die die Ziffernfolge 1212 nicht enthalten?

Aufgabe 23 Wie viele Möglichkeiten gibt es, 15 Briefe auf 5 Personen so zu verteilen, dass jede Person mindestens einen Brief bekommt?

Kapitel 4

Abzählen durch Aufstellen von Rekursionen

Sehr viele Abzählaufgaben lassen sich dadurch lösen, dass man Rekursionen aufstellt und diese dann löst. Wie bereits gezeigt, erfüllen ja z.B. die Binomialkoeffizienten eine sehr wesentliche Rekursion. Im Folgenden soll kurz beleuchtet werden, welche Strategien beim Gewinnen einer Rekursion eingesetzt werden können. Die tatsächliche Lösung solcher Rekursionen wird ebenfalls besprochen, obwohl manches davon stärker in den Bereich „Folgen und Reihen“ fällt.

4.1 Ein erstes Beispiel

Aufgabe 24 Man bestimme die Anzahl der Gebiete, in die die Ebene durch n Geraden aufgeteilt wird, von denen keine zwei parallel sind und keine drei einander in einem Punkt schneiden.

Lösung: Wir betrachten zunächst einige einfache Fälle – ein Prinzip, das grundsätzlich empfehlenswert ist, um ein Gefühl für die Aufgabenstellung zu bekommen. Für $n = 0$ ist die Anzahl der Gebiete offensichtlich 1, für $n = 1$ gibt es zwei Gebiete, für $n = 2$ schon vier. Man könnte zu der Vermutung kommen, dass es sich um Zweierpotenzen handelt, tatsächlich teilen aber drei Geraden die Ebene nur in sieben Gebiete.

Eine neue Vermutung könnte nun sein, dass beim Schritt von $n - 1$ auf n die Anzahl der Gebiete um n anwächst. Dies ist auch richtig, wie eine systematischere Überlegung zeigt: eine neu hinzugefügte Gerade bildet mit den $n - 1$ bisher vorhandenen Geraden nach Voraussetzung genau $n - 1$ Schnittpunkte, die die neue Gerade in n Abschnitte unterteilen. Jeder dieser Abschnitte teilt wiederum eines der bislang vorhandenen Gebiete in zwei Teile, sodass sich die Anzahl der Gebiete genau um n vermehrt.

Bezeichnet nun also a_n die gesuchte Anzahl, so haben wir $a_0 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + n$. Daraus ergibt sich auch eine explizite Form für a_n :

$$a_n = a_{n-1} + n = a_{n-2} + n + (n - 1) = a_{n-2} + n + (n - 1) + (n - 2) = \dots$$

$$= a_0 + n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = a_0 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

nach der bekannten Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen. Die hier vorliegende Rekursion ist eine sogenannte *lineare Rekursion*. Für sie gibt es Standardmethoden zur Lösung, die im Folgenden auch beleuchtet werden sollen.

BEMERKUNG: Es ist von großer Wichtigkeit, beim Aufstellen einer Rekursion auch immer den Geltungsbereich zu beachten. Ein abschreckendes Beispiel (das aber auch wegen der verwendeten Methode lehrreich ist) ist das folgende:

Aufgabe 25 Gegeben sei die Rekursion

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}} \quad (n \geq 1)$$

zusammen mit dem Startwert $a_0 = 1$. Man bestimme einen geschlossenen Ausdruck für a_n .

Lösung: Bildet man den Kehrwert, so ergibt sich

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_0} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}$$

und ebenso

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_0} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen führt auf

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n},$$

was sich zu $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ vereinfacht. Nun könnte man naiv vermuten, dass sich zusammen mit dem Startwert $a_0 = 1$ die Lösung $a_n = 2^{-n}$ ergibt. Tatsächlich ist dies bereits für $a_1 = 1$ falsch. Dies liegt daran, dass die Subtraktion der Gleichungen erst für $n \geq 1$ funktioniert und damit auch $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ erst ab $n \geq 1$ gilt. Es folgt also tatsächlich $a_n = 2^{1-n}$, mit der einzigen Ausnahme für $n = 0$. \square

4.2 Aufstellen und Lösen linearer Rekursionen

Aufgabe 26 Alfred hat n Euro zur Verfügung, von denen er sich an jedem Tag Eis um 2 Euro, eine große Tafel Schokolade um 2 Euro oder Mannerschnitten um 1 Euro kaufen will. Wie viele Möglichkeiten hat Alfred, sein Geld auszugeben?

Lösung: Es sei wieder a_n die gesuchte Anzahl. Um eine Rekursion zu erhalten, betrachten wir die Möglichkeiten am ersten Tag: Alfred kann entweder 2 Euro (und das auf zwei verschiedene Arten) ausgeben, woraufhin er mit seinen restlichen $n - 2$ Euro noch a_{n-2}

Möglichkeiten hat, oder er kann Mannerschnitten kaufen, wonach er noch a_{n-1} Möglichkeiten hat. Es gilt somit die Rekursionsgleichung

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

mit den Startwerten $a_0 = 1$ (wenn er kein Geld mehr hat, bleibt ihm nur noch die eine Möglichkeit, nichts mehr zu kaufen) und $a_1 = 1$ (er kann sich nur Schnitten leisten). Nun geht man den Weg, den man allgemein bei linearen Rekursionen beschreiten kann, die die Form

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_d a_{n-d} \quad (4.1)$$

mit gewissen konstanten Koeffizienten c_1, c_2, \dots, c_d haben. Einfache Beispiele wie $a_n = 2a_{n-1}$ (Startwert $a_0 = 1$) mit der expliziten Lösung $a_n = 2^n$, die man einfach erraten kann, legen den Versuch nahe, mit $a_n = q^n$ anzusetzen. Dieser Ansatz führt auf die Bedingung

$$q^n = c_1 q^{n-1} + c_2 q^{n-2} + \dots + c_d q^{n-d}$$

oder (durch Multiplikation mit q^{d-n})

$$q^d = c_1 q^{d-1} + c_2 q^{d-2} + \dots + c_d.$$

q muss also Lösung der sogenannten *charakteristischen Gleichung*

$$q^d - c_1 q^{d-1} - c_2 q^{d-2} - \dots - c_d = 0,$$

die in unserem speziellen Fall $q^2 - q - 2 = 0$ lautet, sein. Die Lösungen sind hier $q_1 = -1$ und $q_2 = 2$, und tatsächlich sind $a_n = (-1)^n$ und $a_n = 2^n$ Lösungen der Rekursion. Nun müssen nur noch die Startwerte berücksichtigt werden. Dazu stellt man fest, dass auch beliebige Vielfache einer Lösung wieder eine Lösung bilden, und dass auch die Summe zweier Lösungen wieder eine Lösung bildet. Hier also ist jede Folge

$$a_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 2^n$$

eine Lösung der Rekursion, und wir brauchen nur noch A und B an die Startwerte anzupassen. Dazu lösen wir das Gleichungssystem

$$A + B = 1 \text{ und } -A + 2B = 1,$$

woraus sich $A = \frac{1}{3}$ und $B = \frac{2}{3}$ ergibt. Die endgültige Lösung der Aufgabe ist also durch

$$a_n = \frac{1}{3} (2^{n+1} + (-1)^n)$$

gegeben. □

Ohne hier näher auf die Feinheiten eingehen zu wollen, sei noch erwähnt, dass allgemein jede Lösung einer linearen Rekursionsgleichung vom Typ (4.1) die Form

$$a_n = C(1, 1)q_1^n + C(1, 2)nq_1^n + \dots + C(1, l(1))n^{l(1)-1}q_1^n + C(2, 1)q_2^n + C(2, 2)nq_2^n + \dots + C(2, l(2))n^{l(2)-1}q_2^n + \dots + C(r, l(r))n^{l(r)-1}q_r^n$$

hat, wobei q_1, q_2, \dots, q_r die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind und $l(i)$ die *Vielfachheit* von q_i als Nullstelle bezeichnet, d.h. die höchste Potenz l , sodass $(q - q_i)^l$ ein Teiler des charakteristischen Polynoms ist. Im eben behandelten Beispiel waren -1 und 2 jeweils einfache Nullstellen, sodass sich eine Lösung der Form $a_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 2^n$ ergab.

Ein wenig komplizierter werden lineare Rekursionsgleichungen, wenn es sich um *inhomogene Gleichungen* enthalten, wenn also auf der rechten Seite noch ein zusätzlicher von n (nicht aber von der Folge a_n) abhängiger Summand auftaucht, wie etwa in der zuvor aufgetauchten Rekursion

$$a_n = a_{n-1} + n.$$

Diesen zusätzlichen Ausdruck (für gewöhnlich ein Polynom in n oder ein Exponentialausdruck der Form λ^n oder eine Mischung von beiden) bezeichnet man auch als *inhomogenen Term*.

Allgemein ergibt sich dann die Lösung einer solchen Gleichung aus der Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung. In diesem Fall ist die homogene Gleichung

$$a_n = a_{n-1}$$

mit der offensichtlichen allgemeinen Lösung $a_n = C$, also einer konstanten Folge. Um eine spezielle Lösung zu finden, wenn ein inhomogener Term der Form

$$P(n)\lambda^n$$

für ein Polynom P gegeben ist, verwendet man den Ansatz $a_n^* = Q(n)n^{l(\lambda)}\lambda^n$, wobei $Q(n)$ ein noch zu bestimmendes Polynom mit demselben Grad wie P und $l(\lambda)$ die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist (0, wenn es sich gar nicht um eine Nullstelle handelt). Hat man eine Summe aus solchen Termen gegeben, so bildet man entsprechend auch die Summe der einzelnen Ansätze.

Hier also würde der Ansatz $a_n^* = (An + B)n$ lauten, denn $\lambda = 1$ ist einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $q - 1$. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir aus

$$(An + B)n = (A(n - 1) + B)(n - 1) + n$$

$B = B - 2A + 1$ und $0 = A - B$, also $A = B = \frac{1}{2}$. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$\frac{n^2+n}{2} + C,$$

und aus dem Startwert ergibt sich daher für das Beispiel der Gebiete, in die die Ebene durch n Geraden geteilt wird,

$$a_n = \frac{n^2+n}{2} + 1.$$

Als ein letztes Beispiel zur Anwendung der Technik lösen wir die Rekursion

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n2^n \quad (n \geq 2)$$

mit den Startwerten $a_0 = a_1 = 1$. Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Gleichung

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

ist dann $q^2 - 3q + 2$ mit den beiden Lösungen $q_1 = 1$ und $q_2 = 2$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet daher $C_1 + C_2 2^n$. Um nun eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, setzen wir mit $a_n^* = (An + B)n2^n$ an (beachte, dass 2 bereits einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist!):

$$(An + B)n2^n = 3(A(n - 1) + B)(n - 1)2^{n-1} - 2(A(n - 2) + B)(n - 2)2^{n-2} + n2^n.$$

Wir dividieren durch 2^{n-1} und multiplizieren aus:

$$2An^2 + 2Bn = 2An^2 + 2(B - A + 1)n - (A + B).$$

Koeffizientenvergleich ergibt also $B = B - A + 1$ und $A + B = 0$, d.h. $A = 1$, $B = -1$. Die allgemeine Lösung der Rekursionsgleichung lautet somit

$$a_n = (n - 1)n2^n + C_1 + C_2 2^n,$$

und durch Einsetzen der Startwerte erhalten wir $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, also

$$a_n = (n - 1)n2^n + 1.$$

□

Die folgende Aufgabe führt auf die berühmten *Fibonacci-Zahlen*:

Aufgabe 27 Auf wie viele Arten kann man die Häuser eines Häuserblocks derart in den Farben rot und blau streichen, dass keine zwei nebeneinanderliegende Häuser rot sein dürfen?

Lösung: Es sei a_n die gesuchte Anzahl. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Das letzte Haus wird blau gestrichen. Dann können die restlichen Häuser in jeder der erlaubten a_{n-1} Arten gestrichen werden, so als ob das letzte Haus nicht vorhanden wäre.
- Das letzte Haus wird rot gestrichen. Dann muss das vorletzte Haus blau gestrichen werden. Für die restlichen $n - 2$ Häuser hat man – wie zuvor – a_{n-2} Möglichkeiten.

Also ergibt sich die Rekursion

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

mit den einfach aufzufindenden Startwerten $a_1 = 2$ und $a_2 = 3$. Es ergibt sich die Folge 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... der sogenannten *Fibonacci-Zahlen*. Üblicherweise wird diese durch die Startwerte $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ definiert. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass $f_n = a_{n-2}$ gilt. Führt man dieselben Schritte wie im vorangegangenen Beispiel durch (was zur Übung empfohlen wird), so erhält man die *Formel von Binet*:

$$f_n = a_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

4.3 Erzeugende Funktionen

Eine andere Möglichkeit, um lineare Rekursionen zu lösen, besteht in der Methode der *erzeugenden Funktionen*. Diese eignen sich jedoch auch, um manche schwierigeren Rekursionen erfolgreich aufzulösen. Dabei ordnet man einer Folge a_n die unendliche Reihe

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

zu. Wir betrachten nun die erzeugenden Funktionen, die einfachen Folgen zugeordnet sind:

1. Der konstanten Folge $a_n = a$ ist die erzeugende Funktion

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a x^n = a \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{a}{1-x}$$

zugeordnet, was sich aus der bekannten Formel für die geometrische Reihe ergibt.

2. Etwas allgemeiner kann man die geometrische Folge $a_n = ab^n$ betrachten, deren erzeugende Funktion sich folgendermaßen ergibt:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ab^n x^n = a \sum_{n=0}^{\infty} (bx)^n = \frac{a}{1-bx}.$$

3. Wenn wir $a_n = \binom{N}{n}$ setzen und dabei beachten, dass für $n > N$ die Gleichung $\binom{N}{n} = 0$ gilt, dann zeigt der binomische Lehrsatz

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N}{n} x^n = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} x^n = (1+x)^N.$$

Ohne Beweis sei erwähnt, dass dieser auch für nicht-natürliche Zahlen N seine Gültigkeit behält, es gilt also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$$

für beliebiges reelles α (jedoch nur für $-1 < x < 1$; für andere reelle Werte von x konvergiert die Reihe nicht). Insbesondere sind folgende Spezialfälle erwähnenswert:

- $\alpha = -1$: hier ist $\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{(1)(2)\dots(n)} = (-1)^n$ und daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = (1+x)^{-1}.$$

Die Formel für die geometrische Reihe ist also ein Spezialfall.

- $\alpha = -2$: hier ist $\binom{-2}{n} = \frac{(-2)(-3)\dots(-n-1)}{(1)(2)\dots(n)} = (-1)^n(n+1)$ (allgemein gilt sogar $\binom{-m}{n} = (-1)^n \binom{n+m-1}{m-1}$) und daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n = (1+x)^{-2}.$$

Ersetzt man x durch $-x$, so hat man

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

- $\alpha = \frac{1}{2}$: es gilt

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{n} &= \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)\dots(1/2-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-2)}{2^n \cdot n! \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)} = \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{2^n \cdot n! \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1} n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \end{aligned}$$

für $n \geq 1$ ($\binom{1/2}{0} = 1$), sodass sich

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1} n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

ergibt, was wir im letzten Beispiel dieses Kapitels verwenden werden.

Weiters werden noch die folgenden wesentlichen Rechenregeln für erzeugende Funktionen benötigt:

1. Ist $A(x)$ die erzeugende Funktion von a_n , dann ist $cA(x)$ die erzeugende Funktion von ca_n .
2. Sind $A(x)$ und $B(x)$ die erzeugenden Funktionen von a_n und b_n , dann ist $A(x) + B(x)$ die erzeugende Funktion von $a_n + b_n$.
3. Ist $A(x)$ die erzeugende Funktion von a_n , dann ist $A(qx)$ die erzeugende Funktion von $q^n a_n$.
4. Sind $A(x)$ und $B(x)$ die erzeugenden Funktionen von a_n und b_n , dann ist $A(x)B(x)$ die erzeugende Funktion von $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Der Beweis für die ersten drei Regeln wird dem interessierten Leser als Übung überlassen (die Rechenregeln sind im Wesentlichen dieselben wie für Polynome). Der letzten Regel (sog. „Cauchy-Produkt“) wollen wir nun mehr Aufmerksamkeit widmen: durch Ausmultiplizieren des Produkts (vgl. die Bemerkungen zum Beweis von Satz 2.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_k b_m x^{k+m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} a_k b_m x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n, \end{aligned}$$

womit die vierte Regel bewiesen ist. Man kann nun erzeugende Funktionen zum Lösen von Rekursionen verwenden, indem man durch algebraische Umformungen $A(x)$ errechnet und anschließend daraus Rückschlüsse auf die Folge a_n zieht. Dies ist freilich bei weitem nicht die einzige Anwendung erzeugender Funktionen, wir wollen uns hier jedoch darauf beschränken. Zunächst behandeln wir eine lineare Rekursion, die wir bereits mit einer anderen Methode gelöst haben; anschließend werden Beispiele nichtlinearer Rekursionen gebracht, die mit Hilfe von erzeugenden Funktionen ebenfalls erfolgreich behandelt werden können. Es sei hier auch erwähnt, dass die rechnerische Herleitung der Identitäten für Binomialkoeffizienten, die in Kapitel 2 gezeigt wurde, ebenfalls in das Gebiet der erzeugenden Funktionen einzuordnen ist.

Wir betrachten wieder das Musterbeispiel der Rekursion

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n2^n \quad (n \geq 2)$$

mit den Startwerten $a_0 = a_1 = 1$. Die erzeugende Funktion der Folge a_n sei $A(x)$. Wir multiplizieren die Rekursionsgleichung mit x^n und summieren über alle $n \geq 2$ (da die Rekursion erst ab diesem Punkt gilt!). Dann folgt

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 3 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n 2^n x^n.$$

Nun behandeln wir die einzelnen Teile der Identität. Die erste Summe ist $A(x)$ ohne die beiden ersten Glieder, also

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = A(x) - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - x.$$

In der zweiten Summe substituieren wir m für $n-1$ und erhalten

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+1} = x \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m = x(A(x) - a_0) = x(A(x) - 1).$$

Ebenso gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_mx^{m+2} = x^2A(x).$$

Schließlich haben wir noch die Summe $\sum_{n=2}^{\infty} n2^n x^n$ zu bestimmen. Dazu verwenden wir die schon bekannte Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2},$$

aus der sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

ergibt. Damit ist

$$\sum_{n=2}^{\infty} n2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(2x)^n - 2x = \frac{2x}{(1-2x)^2} - 2x.$$

Es gilt also die Identität

$$A(x) - 1 - x = 3x(A(x) - 1) - 2x^2A(x) + \frac{2x}{(1-2x)^2} - 2x.$$

Diese Gleichung lässt sich nun nach $A(x)$ lösen, womit sich

$$A(x) = \frac{1 - 6x + 20x^2 - 16x^3}{(1-x)(1-2x)^3}$$

ergibt. Um daraus eine Formel für a_n zu bestimmen, führt man nun eine sogenannte *Partialbruchzerlegung* durch. Nachdem man den Nenner in Faktoren der Form $1+ax$ zerlegt hat, formt man in eine Summe um, die hier die folgende Form hat:

$$\frac{1 - 6x + 20x^2 - 16x^3}{(1-x)(1-2x)^3} = \frac{A}{1-x} + \frac{B_1}{1-2x} + \frac{B_2}{(1-2x)^2} + \frac{B_3}{(1-2x)^3}.$$

Allgemein spaltet man in eine Summe von Ausdrücken der Form $\frac{C}{(1+ax)^k}$ auf, wobei man mit dem Exponenten k bis zu jener Potenz geht, die im Nenner des Originalausdrucks vorkommt. Einen solchen Ansatz kann man nun mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs lösen (auf den Beweis, das dies immer möglich ist, wird hier verzichtet). Eine andere Möglichkeit ist die folgende: wir multiplizieren beide Seiten mit $1-x$ und setzen $x=1$ ein. Dann folgt sofort $A=1$, da fast alle Terme wegfallen. Ebenso könnte man auch mit $(1-2x)^3$ multiplizieren und $x=\frac{1}{2}$ einsetzen (womit man B_3 erhält), anschließend den letzten Summanden auf beiden Seiten subtrahieren, mit $(1-2x)^2$ multiplizieren (und so B_2 errechnen), etc. Wir stellen hier jedoch kürzer fest, dass

$$\frac{1 - 6x + 20x^2 - 16x^3}{(1-x)(1-2x)^3} - \frac{1}{1-x} = \frac{8x^2}{(1-2x)^3}$$

gilt. Also haben wir den folgenden Ausdruck für $A(x)$:

$$A(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{8x^2}{(1-2x)^3}.$$

Mit Hilfe der Regel für die binomische Reihe können wir damit a_n bestimmen:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{1-x} + \frac{8x^2}{(1-2x)^3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 8x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (-2x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 8x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+2}{2} (-2x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)(2x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)(2x)^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(2x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 + n(n-1)2^n) x^n. \end{aligned}$$

Also gilt $a_n = 1 + n(n-1)2^n$, was mit unserer ersten Herleitung übereinstimmt. \square

Die große Stärke erzeugender Funktionen liegt jedoch darin, dass mit ihnen auch nichtlineare Rekursionen behandelbar werden, wie in den folgenden Beispielen:

Aufgabe 28 Es werden Dosen zum Dosenschießen aufgestellt. Die Dosen werden dabei so aufgebaut, dass jede Dose auf genau zwei darunterliegenden Dosen steht und in keiner der Reihen eine Lücke entsteht (Abbildung 4.1). Wie viele mögliche Konfigurationen gibt es unter dieser Voraussetzung, wenn in der untersten Reihe n Dosen stehen?

Lösung: Es sei wie üblich a_n die gesuchte Anzahl. Eine mögliche Konfiguration besteht aus einer Reihe mit n Dosen, auf die eine gültige Konfiguration mit einer kürzeren untersten Reihe gestellt wird. Besteht die zweite Reihe aus i Dosen, so hat man a_i Möglichkeiten für die Konfiguration und $n-i$ Möglichkeiten für die Position. Eine Ausnahme bildet dabei nur $i=0$, wo alle Positionen natürlich gleich sind. Damit erhält man die Rekursion

$$a_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)a_i = 1 + \sum_{i=0}^n (n-i)a_i \quad (n \geq 1)$$

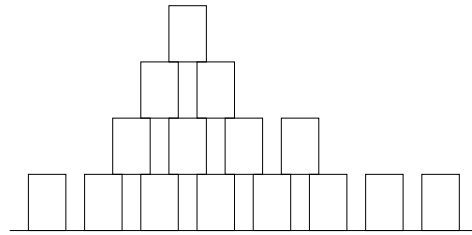


Abbildung 4.1: Eine mögliche Aufstellung beim Dosenschießen.

mit dem Startwert $a_0 = 0$ (den wir in diesem Fall so definieren, dass die Rekursion und damit die Rechnung einfacher wird). Ist $A(x)$ die erzeugende Funktion, dann folgt aus dieser Rekursionsgleichung durch Multiplikation mit x^n und Summation über alle $n \geq 1$ nach der Regel für das Produkt zweier erzeugender Funktionen

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} nx^n \right) A(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x A(x)}{(1-x)^2}$$

mit der Lösung $A(x) = \frac{x-x^2}{1-3x+x^2}$. Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung, wie sie zuvor gezeigt wurde, kann man nun eine explizite Formel für die Folgenglieder gewinnen. Es stellt sich dabei heraus, dass es sich genau um die Fibonaccizahlen mit ungeradem Index, also $1, 2, 5, 13, \dots$ handelt. Wir wollen dies rein mit Hilfe von erzeugenden Funktionen nachweisen. Zu diesem Zweck bestimmen wir die erzeugende Funktion der Fibonaccizahlen, deren Rekursion $f_0 = 0, f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ lautet. Wir setzen $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ und erhalten

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n$$

oder

$$F(x) - x = xF(x) + x^2 F(x)$$

mit der Lösung $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$. Wenn wir uns nun für die ungeraden Folgenglieder interessieren, so beachten wir, dass $\frac{1}{2}(1 - (-1)^n)$ genau für die ungeraden Werte von n gleich 1 ist und andernfalls 0. Damit folgt

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} f_n x^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (-1)^n) f_n x^n = \frac{1}{2} (F(x) - F(-x)).$$

In diesem Fall ist dies genau gleich $\frac{x(1-x^2)}{1-3x^2+x^4}$. Da dies mit

$$A(x^2)/x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n-1}$$

übereinstimmt, handelt es sich bei den Folgengliedern a_n um die Fibonaccizahlen mit ungeradem Index. \square

Als letzte Anwendung erzeugender Funktionen wollen wir die Catalanzahlen in anderer Weise herleiten. Dazu bestimmen wir eine Rekursion für die Anzahl a_n der „Bergketten“ aus jeweils n Aufwärts- und Abwärtsstrichen. Wir betrachten dazu den ersten Zeitpunkt, zu dem die Kette wieder an der Grundlinie angelangt ist. Dies geschieht nach je k Auf- bzw. Abwärtsstrichen für ein gewisses k mit $1 \leq k \leq n$. Der erste dieser $2k$ Striche muss dabei hinauf, der letzte hinunter zeigen (siehe Abbildung 4.2). Die Striche dazwischen bilden wieder eine gültige Bergkette, denn nach unserer Festlegung kehrt sie nicht zur Grundlinie zurück und bleibt daher immer auf Niveau ≥ 1 . Es gibt dafür somit a_{k-1} Möglichkeiten. Danach geht es mit einer beliebigen zulässigen Kette weiter (a_{n-k} Möglichkeiten). Damit folgt die Rekursion

$$a_n = \sum_{k=1}^n a_{k-1} a_{n-k} \quad (n \geq 1).$$

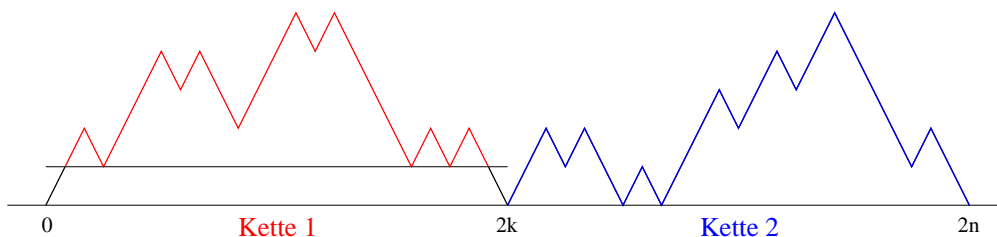


Abbildung 4.2: Zum Beweis der Rekursion für die Catalanzahlen.

Zusammen mit dem Startwert $a_0 = 1$ wird die Folge dadurch festgelegt. Wie zuvor multiplizieren wir mit x^n und summieren über $n \geq 1$. Für die erzeugende Funktion $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ folgt somit

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_{k-1} a_{n-k} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k} x^{n-1} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} x^n = x A(x)^2. \end{aligned}$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung lauten $A(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$. Da $x A(x)$ gleich 0 sein muss, wenn $x = 0$ eingesetzt wird, kommt nur das negative Vorzeichen in Frage. Also gilt

$$A(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Nun setzen wir die bekannte Reihe für $\sqrt{1+x}$ ein:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2x} \left(1 - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} (-4x)^n \right) \\ &= \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n. \end{aligned}$$

Wir können daher $a_n = \binom{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ direkt ablesen und haben somit eine alternative Herleitung für die Anzahl der „Bergketten“.

4.4 Weitere Aufgaben

Aufgabe 29 Auf wieviele Arten kann man ein $2 \times n$ -Rechteck mit 1×2 -Dominos und 2×2 -Quadraten ausfüllen?

Aufgabe 30 Auf wieviele Arten kann man einen $2 \times 2 \times n$ -Quader mit $1 \times 1 \times 2$ -Ziegeln ausfüllen?

Aufgabe 31 (IMO 1979) Es seien A und E zwei gegenüberliegende Eckpunkte eines regelmäßigen Achtecks. Ein Frosch beginnt in Punkt A und springt in einem Zug immer entlang einer Kante. Wenn er E erreicht, bleibt er sitzen. Man bestimme die Anzahl möglicher Wege von A nach E der Länge n (d.h. eine Abfolge von Punkten, beginnend bei A und endend bei E, sodass alle Zwischenpunkte von E verschieden sind und je zwei aufeinanderfolgende Punkte des Weges im Achteck benachbart sind). Für $n = 4$ gibt es etwa die zwei Wege A-B-C-D-E und A-H-G-F-E.

Aufgabe 32 Eine Münze wird so lange geworfen, bis erstmals eine Abfolge von „Kopf“-Ergebnissen ungerader Länge, gefolgt von „Zahl“, erscheint. Wie viele mögliche Abläufe der Länge n gibt es? (Eine Möglichkeit der Länge 13 wäre etwa KKKKZZKKZKKKZ.)

Aufgabe 33 Wie viele Arten gibt es, die Ecken eines regelmäßigen n -Ecks derart mit k Farben einzufärben, dass keine zwei benachbarten Ecken dieselbe Farbe tragen?

Aufgabe 34 (Irland 1997) Wie viele 1000-stellige Zahlen gibt es, sodass

- alle Ziffern ungerade sind und
- je zwei aufeinanderfolgende Ziffern sich um genau 2 unterscheiden?

Aufgabe 35 (Ungarn/Israel 1997) Wie viele Folgen der Länge 1997, gebildet aus den Buchstaben A,B,C, gibt es, für die die Anzahl der vorkommenden A's, B's und C's jeweils eine ungerade Zahl ist?

Aufgabe 36 (Mongolei 2001) Eine Folge von n Punkten ist auf einer Linie gegeben. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese mit den Farben Rot und Blau so zu färben, dass für jede Teilfolge aufeinanderfolgender Punkte die Anzahl roter Punkte in dieser Teilfolge sich von der Anzahl blauer Punkte um höchstens 2 unterscheidet?

Aufgabe 37 (Großbritannien 2001) Zwölf Personen sitzen um einen runden Tisch. Auf wieviele Arten können diese in sechs Paaren einander die Hände schütteln, wenn dabei keine Armpaare einander überkreuzen dürfen?

Aufgabe 38 (Tschechien/Slowakei 2004) Für eine positive ganze Zahl n sei p_n die Anzahl der Wörter der Länge n , die aus den Buchstaben A und B zusammengesetzt sind und weder AAAA noch BBB als Teilwort enthalten. Berechne

$$\frac{p_{2004} - p_{2002} - p_{1999}}{p_{2000} + p_{2001}}.$$

Kapitel 5

Das Schubfachschlussprinzip

5.1 Formulierung des Prinzips und ein erstes Beispiel

Der Schubfachschluss ist ein mathematisches Prinzip, dessen Grundgedanke denkbar einfach ist, das sich jedoch in einer Vielzahl von Aufgaben als sehr mächtig herausstellt. Es geht von der folgenden Tatsache aus:

Satz 5.1 *Werden $n + 1$ Gegenstände auf n Schubfächer verteilt, so gibt es unter den Schubfächern wenigstens eines, das zumindest zwei der Gegenstände enthält. Noch allgemeiner gilt: werden mehr als kn Gegenstände auf n Schubfächer verteilt, dann gibt es zumindest ein Schubfach, das zumindest $k + 1$ Gegenstände enthält.*

Beweis: Zum Beweis gehe man z.B. vom Gegenteil aus – dann enthält jedes Schubfach höchstens k Gegenstände, sodass die Gesamtanzahl aller Gegenstände höchstens kn sein kann, ein Widerspruch. \square

Es lassen sich sehr viele einfache Beispiele angeben, die das Schubfachschlussprinzip illustrieren, z.B.:

Aufgabe 39 Zeige, dass es 20000 Österreicher gibt, die am gleichen Tag Geburtstag haben.

Lösung: Die „Schubfächer“ sind hier die 366 möglichen Geburtsdaten, die „Gegenstände“ die > 8000000 Österreicher. Da $8000000 > 19999 \cdot 366$ gilt, folgt die Behauptung sofort. \square

5.2 Verschiedene Anwendungsbereiche

Die wesentliche Schwierigkeit in der Anwendung des Prinzips – die mitunter einigen Einfallsreichtum erfordert – besteht darin, die richtigen „Schubfächer“ und „Gegenstände“ zu definieren. Dies sei zunächst an folgendem einfachen Beispiel gezeigt:

Aufgabe 40 Existieren vier bzw. fünf verschiedene positive ganze Zahlen derart, dass die Summe von je dreien eine Primzahl ist?

Lösung: Vier solche Zahlen lassen sich finden: 1, 3, 7 und 9 erfüllen die Bedingung. Fünf Zahlen mit dieser Bedingung gibt es jedoch nicht: wir betrachten die Zahlen dazu modulo 3. Dann gibt es drei Schubfächer (Restklassen): 0, 1 und 2. Wenn sich in jeder Restklasse eine Zahl befindet, dann ist die Summe dieser drei Zahlen durch 3 teilbar und, da es sich um verschiedene positive Zahlen handelt, auch > 3 . Damit kann es sich nicht um eine Primzahl handeln.

Andernfalls verteilen sich die Zahlen auf nur zwei Restklassen, sodass es in einer von ihnen drei geben muss. Die Summe dieser drei Zahlen ist jedoch wieder zwangsläufig durch 3 teilbar, sodass sich dasselbe Argument anwenden lässt. \square

Ein etwas komplexeres Beispiel ist das folgende:

Aufgabe 41 Zeige: eine Folge von $nm + 1$ reellen Zahlen hat entweder eine monoton wachsende Teilfolge der Länge $n + 1$ oder eine monoton fallende Teilfolge der Länge $m + 1$.

Beweis: Es sei x_1, x_2, \dots die Folge und $l(i)$ die Länge der längsten monoton wachsenden Teilfolge, die mit dem i -ten Element beginnt. Wenn es ein i mit $l(i) \geq n + 1$ gibt, ist bereits alles bewiesen. Andernfalls gilt $1 \leq l(i) \leq n$ für alle i , sodass es nur n Möglichkeiten („Schubfächer“) für die $nm + 1$ Folgenglieder gibt. Nach dem Schubfachschlussprinzip gibt es daher mindestens $m + 1$ Folgenglieder mit dem gleichen Wert L von $l(i)$. Wir zeigen, dass diese Folgenglieder eine monoton fallende Teilfolge bilden müssen. Andernfalls gäbe es zwei Elemente x_i, x_j mit $i < j$, $x_i \leq x_j$ und $l(i) = l(j) = L$. Wenn man nun an die längste wachsende Teilfolge, die mit x_j beginnt, vorne x_i anhängt, so erhält man eine wachsende Teilfolge der Länge $L + 1$, im Widerspruch zu $l(i) = L$. Somit bilden die Folgenglieder x_i mit $l(i) = L$ eine monoton fallende Teilfolge mit mindestens $m + 1$ Folgengliedern. \square

Sehr häufig wird der Schubfachschluss in geometrische Aufgaben eingebettet, wie etwa im folgenden Beispiel:

Aufgabe 42 Beweise: von fünf Punkten, die sich im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge 1 befinden, gibt es zwei, deren Abstand höchstens $\frac{1}{2}$ beträgt.

Lösung: Wir teilen das Dreieck in vier kongruente Teile ein, wie in Abbildung 5.1 gezeigt. Von den fünf Punkten muss es dann zwei geben, die im gleichen Teildreieck liegen. Diese haben dann voneinander höchstens einen Abstand, der der Seitenlänge von $\frac{1}{2}$ entspricht. \square

Ebenso taucht der Schubfachschluss auch manchmal in zahlentheoretischen Anwendungen auf; ein solches Beispiel wurde bereits gezeigt, in der folgenden Aufgabe findet sich eine weitere zahlentheoretische Anwendung:

Aufgabe 43 (ÖMO 2005) Man zeige: Es gibt unendlich viele Vielfache von 2005, die alle 10 Ziffern 0, 1, 2, 3, \dots , 9 gleich oft enthalten.

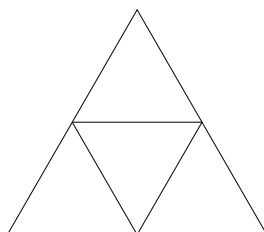


Abbildung 5.1: Einteilung des Dreiecks.

Lösung: Hier führen zahlreiche Wege zum Ziel, und eine Möglichkeit bietet der Schubfachschluss. Wir betrachten alle Zahlen der Form

$$12345678901234567890 \dots 1234567890,$$

die allesamt durch 5 teilbar sind und jede Ziffer gleich oft enthalten. Da es unendlich viele solche Zahlen gibt, müssen mindestens zwei von ihnen derselben Restklasse modulo 401 angehören. Subtrahiert man diese voneinander, so erhält man eine Zahl der Form

$$12345678901234567890 \dots 1234567890000 \dots 000,$$

die durch 401 teilbar ist. Da 401 zu 10 teilerfremd ist, muss es auch eine Zahl der Form

$$12345678901234567890 \dots 1234567890$$

geben, die durch 401 teilbar ist. Diese Zahl ist dann auch durch 2005 teilbar und erfüllt somit die Bedingung. \square

Eine berühmte Anwendung des Schubfachschlusses, die dieses Kapitel beschließen soll, ergibt sich im Zusammenhang mit den sogenannten *Ramseyzahlen*:

Aufgabe 44

1. Zeige, dass von sechs Personen, die sich begegnen, es entweder drei gibt, die einander gegenseitig bereits kennen, oder drei, die einander gegenseitig noch nicht kennen.
2. Jede von 17 Wissenschaftlerinnen steht mit allen anderen im Briefwechsel; dabei werden insgesamt drei verschiedene Themen behandelt. Je zwei Wissenschaftlerinnen korrespondieren nur über genau eines der Themen. Man zeige, dass es unter ihnen drei gibt, die untereinander ein und dasselbe Thema behandeln.

Lösung:

1. Wir betrachten eine beliebige Person X. Von den fünf übrigen gibt es entweder drei, die X bereits kennt, oder drei, die X noch nicht kennt. Diese beiden Fälle sind vollkommen analog zu behandeln, wir nehmen also ersteres an. Wir unterscheiden zwei Fälle, die sich jeweils einfach behandeln lassen:

- Wenn von den drei Personen, die X kennt, zwei einander gegenseitig kennen, bilden diese zusammen mit X ein Tripel von Personen, die einander gegenseitig kennen.
 - Andernfalls bilden diese drei ein Tripel von Personen, die einander gegenseitig nicht kennen.
2. Wir betrachten eine beliebige Wissenschaftlerin W. Unter ihren 16 Kolleginnen gibt es mindestens sechs, mit denen sie ein gemeinsames Thema, das wir Thema A nennen, behandelt. Wenn unter diesen sechs zwei miteinander ebenfalls Thema A behandeln, sind wir bereits fertig. Andernfalls behandeln diese sechs Wissenschaftlerinnen untereinander nur zwei Themen, Thema B und Thema C. Wenn wir „Thema B“ mit „kennen“ und „Thema C“ mit „nicht kennen“ identifizieren, so erkennen wir, dass damit das Problem auf den ersten Teil der Aufgabe zurückgeführt wurde. \square

Dieses Beispiel lässt sich noch weiter verallgemeinern – in Kapitel 7.4 kommen wir darauf zurück.

5.3 Weitere Aufgaben

Aufgabe 45 Es sei $p > 3$ eine Primzahl und n eine positive ganze Zahl. Man zeige: hat die Zahl p^n genau 100 Stellen, so gibt es eine Ziffer, die unter diesen zumindest 11 mal vorkommt.

Aufgabe 46 Eine unendliche Folge von Ziffern (0–9) ist gegeben. Zeige, dass man immer einen endlichen Teilabschnitt auswählen kann, sodass die dadurch repräsentierte Zahl durch 37 teilbar ist. Zum Beispiel enthält die Ziffernfolge

$$12784389674598694\dots$$

die Zahl $74 = 2 \cdot 37$.

Aufgabe 47 (Island 1996) Zeige, dass es unter 52 paarweise verschiedenen ganzen Zahlen zwei verschiedene gibt, sodass 100 entweder deren Summe oder deren Differenz teilt.

Aufgabe 48

1. Gegeben seien 5 verschiedene Gitterpunkte der Koordinatenebene (ein Punkt heißt dabei Gitterpunkt, wenn er ganzzahlige Koordinaten hat). Beweise, dass mindestens eine der Verbindungsstrecken einen Gitterpunkt im Inneren enthält.
2. Die Eckpunkte eines konvexen Fünfecks haben ganzzahlige Koordinaten. Zeige, dass das Fünfeck mindestens Flächeninhalt $5/2$ hat.

Aufgabe 49 (BWB Deutschland 2004) In der Ebene liegen n Kreisscheiben K_1, \dots, K_n mit gleichem Radius r . Jeder Punkt der Ebene ist dabei in höchstens 2003 dieser Kreisscheiben enthalten. Man beweise, dass jede Kreisscheibe K_i höchstens 14020 andere Kreisscheiben schneidet. Der Rand wird dabei stets als Bestandteil einer Kreisscheibe gezählt.

Aufgabe 50 Ein Spielschein für das „Mathelotto“ ist ein quadratisches Raster mit 6×6 Feldern. Ein Spieler markiert darauf sechs Felder und schickt den Spielschein an die Spielbehörde. Anschließend werden sechs „Verlustfelder“ veröffentlicht. Gewonnen hat man, wenn man auf seinem Spielschein kein Verlustfeld markiert hat.

- Beweise, dass man neun Spielscheine so ausfüllen kann, dass man sicher mit mindestens einem Schein gewinnt.
- Beweise, dass dies mit acht Scheinen nicht möglich ist.

Aufgabe 51 In der Dorfschule von Raach gibt es 20 Kinder, von denen je zwei einen gemeinsamen Großvater haben. Beweise, dass es 14 Kinder unter den 20 gibt, die alle einen gemeinsamen Großvater haben.

Aufgabe 52 (IMO 1978) Eine internationale Gesellschaft hat Mitglieder aus sechs verschiedenen Nationen. Die Liste der Mitglieder umfasst 1978 Namen, die von 1 bis 1978 durchnummeriert sind. Zeige, dass es zumindest ein Mitglied gibt, dessen Nummer die Summe der Nummern zweier anderer Vertreter seines Landes oder das Doppelte der Nummer eines Landsmanns ist.

Aufgabe 53 Auf einem 10×10 -Schachbrett werden 41 Türme beliebig verteilt. Zeige, dass es unter ihnen stets fünf gibt, die einander paarweise nicht bedrohen.

Aufgabe 54 (Tschechien/Slowakei 1998) Gegeben ist eine Menge von 14 paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen. Zeige, dass man zwei Teilmengen $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ dieser Menge mit gleich vielen Elementen und leerem Durchschnitt finden kann, sodass sich die Summen

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k}$$

und

$$y = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k}$$

um weniger als 0.001 unterscheiden, d.h. $|x - y| < 0.001$.

Aufgabe 55 (Kanada 2003) In der Ebene sind n Punkte gegeben, die paarweise voneinander Abstand > 1 haben. Zeige, dass man von diesen Punkten mindestens $n/7$ auswählen kann, dass diese paarweise voneinander Abstand $> \sqrt{3}$ haben.

Kapitel 6

Potentiale und Invarianten

Zu den kombinatorischen Prinzipien, die sich vielleicht am schlechtesten theoretisch fassen lassen, zählen Invarianten und Potentialfunktionen. Die Trennung zwischen den beiden ist auch nicht vollkommen einheitlich und kann etwa folgendermaßen beschrieben werden:

- Eine *Invariante* ist ein Parameter, der unter gewissen Operationen unverändert bleibt oder unabhängig von Auswahlmöglichkeiten ist.
- Eine *Potentialfunktion* ist typischerweise ein Wert, von dem nachgewiesen wird, dass er durch bestimmte Operationen (nicht) vergrößert/verkleinert wird.

6.1 Invarianten

Am einfachsten sind diese Konzepte anhand von Beispielen zu verstehen; wir beginnen mit folgender klassischer Aufgabe:

Aufgabe 56 Von einem gewöhnlichen 8×8 -Schachbrett werden zwei diagonal gegenüberliegende Eckfelder entfernt. Ist es möglich, die verbleibenden 62 Felder mit 31 2×1 -Dominosteinen auszulegen?

Lösung: Eine solche Pflasterung des Schachbretts ist nicht möglich. Zum Nachweis stellen wir uns das Schachbrett wie üblich anwechselnd schwarz und weiß eingefärbt und beachten dabei, dass ein 2×1 -Stein – egal wie er auf das Brett gelegt wird – immer ein weißes und ein schwarzes Feld bedeckt. Also ist die Anzahl der bedeckten weißen Felder gleich der Anzahl der bedeckten schwarzen Felder – wir haben eine Invariante gefunden. Da jedoch das Schachbrett mit den abgeschnittenen Feldern aus 32 Feldern der einen Farbe und 30 Feldern der anderen Farbe besteht, ist die Forderung unerfüllbar. \square

Die Invarianten können natürlich bedeutend komplizierter sein als in diesem Beispiel, aber dennoch denselben Grundgedanken enthalten. Als Beispiel sei die folgende Aufgabe von der IMO 2004 genannt:

Aufgabe 57 (IMO 2004) Welche $n \times m$ -Rechtecke kann man mit „Haken“ von der abgebildeten Form (Abbildung 6.1) vollständig und ohne Überhang oder Überlappungen auslegen?

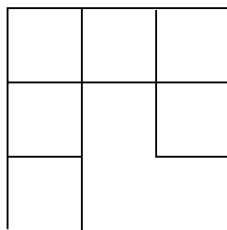


Abbildung 6.1: Der „Haken“.

Lösung: Wird ein solcher Haken auf das Rechteck gelegt, so bleibt in der Mitte ein Feld frei, das von einem anderen Haken aufgefüllt werden muss. Da nur ein Nachbarfeld freibleibt, kommt dafür nur eines der Enden des zweiten Hakens in Frage. Es zeigt sich leicht, dass es genau zwei Varianten gibt (Abbildung 6.2).

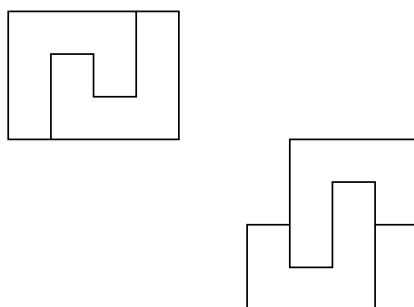


Abbildung 6.2: Die beiden Möglichkeiten, zwei Haken zusammenzufassen.

Man hat also für die Pflasterung zwei Teile zur Verfügung: ein 3×4 -Rechteck und ein „verschobenes“ Rechteck. Beide haben eine Fläche von 12 Einheiten, sodass die Fläche des Rechtecks durch 12 teilbar sein muss. Wir unterscheiden nun 2 Fälle.

Eine Seitenlänge ist durch 4 teilbar. Da auch eine Seitenlänge durch 3 teilbar sein muss, hat das Rechteck die Maße $3k \times 4l$ oder $k \times 12l$. Ein Rechteck der Form $3k \times 4l$ lässt sich in trivialer Form mit 3×4 -Rechtecken auslegen. Damit kann man auch ein $3 \times 12l$ und ein $4 \times 12l$ -Rechteck auslegen, und in weiterer Folge auch alle Rechtecke der Form $(3a + 4b) \times 12l$, indem man sie in Streifen unterteilt.

Jede natürliche Zahl $\neq 1, 2, 5$ lässt sich als $3a + 4b$ schreiben, der Beweis durch Induktion ist sehr einfach. Ein $1 \times 12l$ - oder ein $2 \times 12l$ -Rechteck lässt sich offensichtlich nicht pflastern, da ein Haken schlicht keinen Platz hat. Schließlich betrachten wir noch das $5 \times 12l$ -Rechteck.

Wie die Abbildung 6.3 zeigt, wird in jedem Fall bei Besetzung der linken unteren Ecke das mit einem Kreuz markierte Feld auch belegt. Da dasselbe auch für die linke obere Ecke gilt, müsste es zu Überlappungen kommen, womit der erste Fall abgehandelt ist.

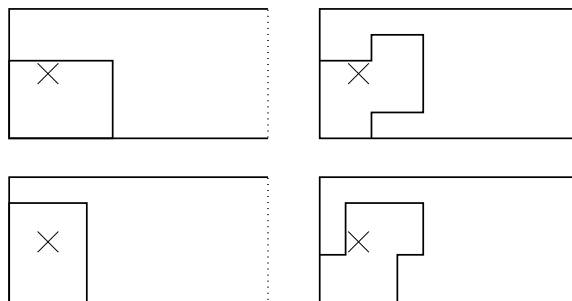


Abbildung 6.3: Vier Möglichkeiten, die Ecke zu besetzen.

Keine Seitenlänge ist durch 4 teilbar. In diesem Fall müssen beide Seitenlängen gerade sein. Nun betrachten wir eine Schwarz-Weiß-Färbung in waagrechte Steifen. Da beide Seitenlängen gerade sind, wird dabei genau die Hälfte der Felder schwarz markiert. Außerdem zeigt sich, dass die beiden Teile, unabhängig davon, wie sie auf das Rechteck gelegt werden, stets sechs weiße und sechs schwarze Felder belegen. Eine Ausnahme bilden nur die 3×4 -Rechtecke, deren längere Seite horizontal ausgerichtet ist. Bei ihnen sind es 4 weiße und 8 schwarze Felder oder umgekehrt. Von beiden Arten muss es gleich viele geben, da sonst nicht gleich viele weiße wie schwarze Felder besetzt sind. Die Anzahl der 3×4 -Rechtecke mit horizontaler längerer Seite ist somit gerade. Gleiches gilt natürlich analog auch für solche mit vertikaler längerer Seite.

Dieselbe Argumentation mit Hilfe der folgenden vier (im Wesentlichen identen) Färbungen (Abbildung 6.4) zeigt, dass auch eine gerade Anzahl von „verschobenen“ 3×4 -Rechtecken verwendet werden muss. Damit wäre jedoch die Fläche des Rechtecks durch 24 teilbar, was aufgrund der Annahme aber nicht möglich ist.

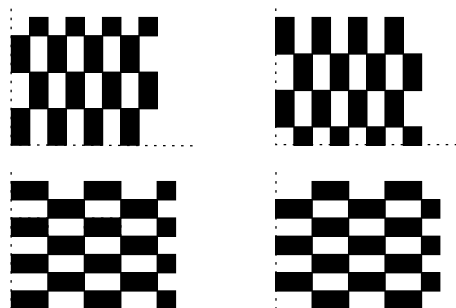


Abbildung 6.4: Weitere Färbungen.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass sich ein Rechteck genau dann mit den vorgegebenen Haken auslegen lässt, wenn es die Form $k \times 12l$ ($k \neq 1, 2, 5$) oder $3k \times 4l$ hat. \square

Es gibt zahllose weitere Aufgaben, bei denen derartige Färbungen eine Rolle spielen. Als letztes Beispiel dieser Art betrachten wir das folgende:

Aufgabe 58 25 Bauern werden in das linke untere Viertel eines 10×10 -Schachbretts gesetzt. Jeder Bauer kann über jeden benachbarten (waagrecht, senkrecht oder diagonal) auf ein freies Feld springen. Ist es möglich, dass sich nach einigen solchen Sprüngen alle Bauern im linken oberen oder alle Bauern im rechten oberen Viertel befinden?

Lösung: Zunächst färben wir das Schachbrett wie gewohnt abwechselnd schwarz und weiß, wobei etwa die linke untere Ecke schwarz sei. Dabei stellen wir fest, dass ein Bauer bei keinem der erlaubten Züge die Farbe des Feldes wechseln kann, auf dem er steht. Da zu Beginn jedoch 13 Bauern auf einem schwarzen Feld stehen und es im linken oberen Viertel nur 12 schwarze Felder gibt, ist es nicht möglich, alle Bauern dorthin zu befördern.

Diese Überlegung löst jedoch nicht die zweite Frage. Sollten wir nach einer Möglichkeit suchen, die Bauern in das rechte obere Viertel zu bringen, oder gibt es ein anderes Argument, dass auch die Unmöglichkeit dieser Aufgabe zeigt?

In der Tat gibt es das, man muss nur die Färbung des Brettes anders vornehmen, nämlich in Form von waagrechten Streifen (z.B.: erste Reihe weiß, zweite Reihe schwarz, etc.). Wieder kann ein Bauer bei einem Zug nicht seine Farbe wechseln. Zu Beginn stehen nun 15 Bauern auf weißen Feldern, am Ende sollen es jedoch 10 sein. Durch diese Färbung können wir also gleich beide Fragen negativ beantworten. \square

Eine der häufigsten Invarianten ist die Parität (gerade oder ungerade) eines bestimmten Parameters, wie in den folgenden beiden Beispielen:

Aufgabe 59 In einer Urne liegen genau 2006 weiße und 2007 schwarze Kugeln. Neben der Urne gibt es einen unbegrenzten Haufen schwarzer Kugeln. In jedem Schritt werden zufällig zwei Kugeln aus der Urne entnommen. Tragen sie die gleiche Farbe, legen wir sie weg und stattdessen eine schwarze Kugel vom Haufen in die Urne. Sind sie aber verschieden, dann legen wir die weiße Kugel zurück, die schwarze wird weggelegt. Dieses Verfahren wird wiederholt, bis nur noch eine Kugel in der Urne übrig ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Kugel weiß ist?

Lösung: Hier handelt es sich nur scheinbar um eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Tatsächlich werden wir zeigen, dass die letzte Kugel *mit Sicherheit* schwarz ist. Zunächst überzeugen wir uns davon, dass das Verfahren sicher endet, denn in jedem Schritt sinkt die Anzahl der Kugeln um 1. Nunmehr betrachten wir die Anzahl der weißen Kugeln und beweisen, dass diese immer gerade ist. Zu Beginn ist sie eine gerade Zahl, nämlich 2006. Sind die beiden gezogenen Kugeln beide schwarz, ändert sich nichts an der Zahl der weißen Kugeln. Sind sie beide weiß, sinkt sie um 2 und bleibt somit gerade. Tragen sie verschiedene Farben, so wird nur die schwarze entfernt, und die Anzahl weißer Kugeln bleibt gleich.

Also muss die Anzahl der weißen Kugeln auch am Ende gerade sein – wenn nur noch eine Kugel insgesamt übrig ist, dann kann diese Anzahl nur 0 sein. \square

Aufgabe 60 Kann man die Zahlen von 1 bis 21 so in einem dreieckigen Schema anordnen (die erste Zeile enthält 6 Zahlen, die zweite 5, die dritte 4, etc.), dass jede Zahl ab der zweiten Reihe die Differenz der beiden darüberliegenden ist? Mit 6 Zahlen ist das etwa möglich:

$$\begin{array}{ccccc} 6 & & 1 & & 4 \\ & & 5 & & 3 \\ & & & & 2 \end{array}$$

Lösung: Wir betrachten die Einträge modulo 2. Die Einträge in der obersten Reihe seien dabei a_1, a_2, \dots, a_6 . Da modulo 2 Addition und Subtraktion zum gleichen Ergebnis führen, ergibt sich das folgende Bild:

- 1. Reihe: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$.
- 2. Reihe: $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, a_5 + a_6$.
- 3. Reihe: $a_1 + a_3, a_2 + a_4, a_3 + a_5, a_4 + a_6$.
- 4. Reihe: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4, a_2 + a_3 + a_4 + a_5, a_3 + a_4 + a_5 + a_6$.
- 5. Reihe: $a_1 + a_5, a_2 + a_6$.
- 6. Reihe: $a_1 + a_2 + a_5 + a_6$.

Nun addieren wir alle Werte und kommen dabei auf eine Gesamtsumme von

$$6a_1 + 8a_2 + 8a_3 + 8a_4 + 8a_5 + 6a_6 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Die Summe der 21 Zahlen ist jedoch

$$\sum_{i=1}^{21} i = \frac{21 \cdot 22}{2} = 231 \equiv 1 \pmod{2},$$

sodass eine solche Zuordnung nicht möglich ist. \square

Schließlich sei hier noch eine Aufgabe vorgestellt, die zeigt, dass oftmals eine gewisse Kreativität im Auffinden von Invarianten nötig ist. Umso kürzer und eleganter erscheinen dafür letzten Endes die Lösungen:

Aufgabe 61 Gegeben seien die drei Zahlen $0, 1, \sqrt{2}$. Mit ihnen wird nun folgende Operation durchgeführt: eine der Zahlen wird ausgewählt und ein beliebiges rationales Vielfaches der Differenz der beiden anderen addiert. Ist es möglich, dass man durch Anwendung dieser Operation nach einigen Schritten das Tripel $0, \sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1$ erreicht?

Lösung: Da $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, haben alle Zahlen, die durch Anwendung der Operation entstehen, stets die Form $a + b\sqrt{2}$ mit rationalen Werten a, b . Eine solche Zahl wird durch den Punkt mit den Koordinaten (a, b) in der Ebene repräsentiert. Wir betrachten nun das durch die drei Zahlen beschriebene Dreieck. Zu Beginn besteht es aus den Punkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$. Ein Schritt bedeutet – geometrisch interpretiert – eine Verschiebung eines Punktes entlang einer zur Gegenseite parallelen Geraden. Da sich dabei weder die Gegenseite noch die Höhe darauf verändert, bleibt der Flächeninhalt invariant. Da dieser zu Beginn $\frac{1}{2}$ beträgt, das Dreieck aus den Punkten $(0, 0)$, $(-1, 1)$ und $(1, 1)$ aber Flächeninhalt 1 hat, ist es nicht möglich, das geforderte Tripel zu erreichen. \square

6.2 Potentiale

Nun wollen wir uns Potentialfunktionen zuwenden. Sehr häufig können diese benutzt werden, um zu zeigen, dass gewisse Prozesse jedenfalls enden müssen. Ein sehr einfaches Beispiel dieses Typs ist uns bereits in Aufgabe 59 begegnet, ohne dass wir diesem besondere Beachtung geschenkt hätten. Oftmals muss man jedoch etwas komplizierte Parameter einführen, wie etwa in den folgenden beiden Aufgaben:

Aufgabe 62 In die Felder einer $n \times m$ -Tabelle werden zufällig die Werte -1 und 1 geschrieben. Anschließend darf man beliebig oft eine Zeile oder Spalte mit -1 multiplizieren (d.h. die Vorzeichen aller Einträge umkehren). Man zeige, dass es möglich ist, durch eine Folge solcher Schritte zu erreichen, dass alle Zeilen- und Spaltensummen in der Tabelle nichtnegative ganze Zahlen sind.

Lösung: Zur Lösung dieser Aufgabe gehen wir folgendermaßen vor: wann immer eine Zeile oder Spalte eine negative Summe aufweist, wird sie mit -1 multipliziert. Dabei kann sich natürlich in gewissen Spalten bzw. Zeilen eine negative Summe ergeben, sodass a priori nicht klar ist, ob das Verfahren jemals zu einem Ende kommen wird. Zum Nachweis, dass dies doch der Fall ist, betrachten wir die Gesamtsumme aller Zahlen in der Tabelle. Diese wächst bei jedem Schritt mindestens um 2, denn aus einer Zeile oder Spalte mit Summe ≤ -1 wird eine Zeile oder Spalte mit Summe ≥ 1 . Würde der Prozess also nicht enden, so müsste die Gesamtsumme ins Unendliche wachsen. Dies ist aber klarerweise nicht möglich, denn die Summe ist nach oben durch mn beschränkt (jeder Eintrag ist höchstens gleich 1). Das Verfahren kann jedoch nur dann enden, wenn es keine Zeile oder Spalte mit negativer Summe mehr gibt, womit die Forderung erfüllt ist. \square

Aufgabe 63 12 Einsiedler im Wald pflegen untereinander Freundschaften. Jeder Monat des Jahres ist einem Einsiedler als Besuchsmonat zugeordnet. In diesem besucht er alle seine Freunde. Die Häuser der Einsiedler sind grün oder braun; am Ende seines Besuchsmonats ändert ein Einsiedler die Farbe seines Hauses, wenn mehr als die Hälfte seiner Freunde eine andere Hausfarbe als er selbst haben. Beweise: nach einiger Zeit muss kein Einsiedler mehr die Farbe seines Hauses ändern.

Lösung: Der Zugang ist ganz ähnlich zum vorigen Beispiel. Wir betrachten dazu die Anzahl der übereinstimmenden Paare, d.h. die Anzahl der Paare befreundeter Einsiedler, deren Häuser dieselbe Farbe tragen. Wenn ein Einsiedler die Farbe seines Hauses ändert, so wächst den Regeln gemäß die Anzahl der übereinstimmenden Paare, denn er bildet nun im Gegensatz zur Situation davor mit mehr als der Hälfte seiner Freunde ein übereinstimmendes Paar (an allen anderen übereinstimmenden Paaren ändert sich nichts). Die Anzahl übereinstimmender Paare ist jedoch höchstens gleich der Gesamtzahl aller Paare von Einsiedlern, und diese beträgt $\binom{12}{2} = 66$. Somit kann die Anzahl übereinstimmender Paare nicht beliebig wachsen, sodass irgendwann kein Einsiedler eine Veranlassung dazu sieht, sein Haus umzufärben. \square

6.3 Weitere Aufgaben

Aufgabe 64 Neun Damesteine werden in der linken unteren Ecke eines 8×8 -Schachbretts so aufgestellt, dass sie ein 3×3 -Quadrat bilden. Ein Spielstein a kann so über einen anderen Spielstein b springen, dass er auf jenem Feld landet, das symmetrisch zu seinem Startfeld bezüglich des Feldes von b liegt. Ist es möglich, durch solche Sprünge das ganze 3×3 -Quadrat

1. in die linke obere
2. in die rechte obere

Ecke des Schachbretts zu versetzen?

Aufgabe 65 10 Münzen werden so im Kreis angeordnet, dass „Kopf“ sichtbar ist, „Zahl“ unten liegt. Nun sind zwei Arten von Zügen erlaubt:

- vier im Kreis aufeinanderfolgende Münzen werden umgedreht;
- von fünf im Kreis aufeinanderfolgenden Münzen werden alle bis auf die mittlere umgedreht.

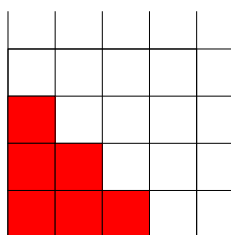
Kann man mit einer endlichen Anzahl von Zügen erreichen, dass alle Münzen „Zahl“ zeigen?

Aufgabe 66 Ein König bewegt sich auf einem Schachbrett so, dass er jedes Feld genau einmal besucht und schließlich auf sein Ausgangsfeld zurückkehrt. Beweise, dass er auf seiner Tour eine gerade Anzahl an Diagonalzügen gemacht haben muss.

Aufgabe 67 Aus jedem Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ wird ein neues Tripel nach der Vorschrift $(a, b, c) \rightarrow (b\sqrt{2} + c/\sqrt{2}, c\sqrt{2} + a/\sqrt{2}, a\sqrt{2} + b/\sqrt{2})$ gebildet. Ist es möglich, nach einer gewissen Anzahl von Schritten aus dem Tripel $(4 - 21\sqrt{2}, 28 + 9\sqrt{2}, -32 + 12\sqrt{2})$ das Tripel $(108 + 117\sqrt{2}, -196 - 54\sqrt{2}, 88 - 66\sqrt{2})$ zu erhalten?

Aufgabe 68 Auf einem nach oben und rechts unbegrenzten Feld sind sechs Spielsteine in der linken unteren Ecke wie dargestellt markiert. Auf gewissen Feldern stehe zu Beginn ein Spielstein. Nun darf nach folgender Regel transformiert werden: sind das obere und rechte Feld neben einem Spielstein frei, so darf er durch zwei Steine auf diesen Feldern ersetzt werden. Ist es möglich, alle Steine durch solche Transformationen aus dem markierten Bereich zu bringen, wenn anfangs

1. alle markierten Felder mit Steinen besetzt sind,
2. nur im Feld links unten ein Spielstein liegt?



Aufgabe 69 Sei $k \geq 1$ eine ganze Zahl. Auf jedem Feld eines $(2k + 1) \times (2k + 1)$ -Schachbretts sitze genau eine Fliege. Auf ein Signal hin fliegen alle Fliegen auf ein diagonal benachbartes Feld (wobei auch mehrere Fliegen auf dem gleichen Feld landen dürfen). Man bestimme die Minimalzahl von Feldern, die nach dem Flug leer sind.

Aufgabe 70 Zeige: ein $n \times m$ -Rechteck kann genau dann mit L-förmigen Teilen der folgenden Art (siehe Abbildung 6.5) vollständig überdeckt werden (wobei keine Teile über den Rand ragen sollen und keine zwei Teile einander überlappen), wenn nm durch 8 teilbar ist.

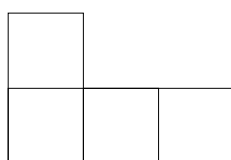


Abbildung 6.5: Ein L-Tetromino

Aufgabe 71 Ist es möglich, ein Brett mit den Maßen 10×10 durch Plättchen mit den Maßen 1×4 derart vollständig zu bedecken, dass kein Plättchen über den Rand des Brettes ragt und keine zwei Plättchen einander überlappen?

Aufgabe 72 (Kanada 1994) 25 Personen sitzen im Kreis und stimmen jede Stunde für oder gegen einen Antrag. Jede Person ändert ihre Stimme genau dann, wenn beide Nachbarn bei der vorherigen Abstimmung anders gestimmt haben. Zeige, dass nach einer Weile niemand mehr die Stimme ändert.

Kapitel 7

Einige Konzepte der Graphentheorie

7.1 Definitionen

Verschiedenste graphentheoretische Definitionen und Notationen sind im Gebrauch, die leider keineswegs einheitlich sind. Da es hier jedoch nur um prinzipielle Konzepte und nicht um puristische Definitionen gehen soll, werden nur einige intuitive Begriffe eingeführt.

Ein *Graph* besteht aus einer Menge V von *Knoten* und einer Menge E von *Kanten*, wobei jede der Kanten zwischen zwei Knoten v_1 und v_2 verläuft. Wir schreiben eine solche Kante als Paar (v_1, v_2) von Knoten (dabei werden (v_1, v_2) und (v_2, v_1) als dieselbe Kante betrachtet; unterscheidet man die beiden, so spricht man von einem *gerichteten Graphen*). Eine Kante, die einen Knoten mit sich selbst verbindet, heißt *Schleife*. Es ist auch möglich, dass ein Paar von Knoten durch mehrere Kanten (*Mehrfachkanten*) verbunden ist. Gibt es Schleifen und/oder Mehrfachkanten, so spricht man von *Multigraphen*.

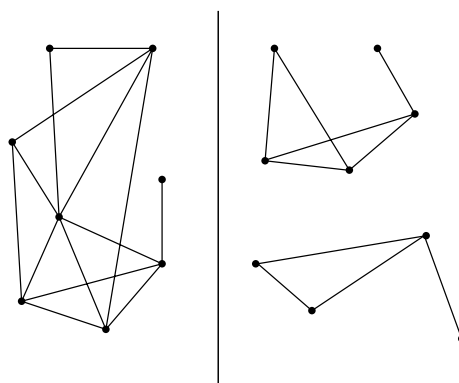


Abbildung 7.1: Zwei Graphen

Rein intuitiv kann man sich Punkte in der Ebene vorstellen, die paarweise durch Strecken verbunden sind, wie in Abbildung 7.1. Ein wesentliches und auch sehr anschauliches Konzept ist der Zusammenhang von Graphen – wir nennen einen Graphen *zusammenhängend*,

wenn man je zwei beliebige Knoten durch einen Weg (ununterbrochener Kantenzug zwischen den beiden Knoten) miteinander verbinden kann. So ist etwa der linke Graph in Abbildung 7.1 zusammenhängend, der rechte nicht.

Die zusammenhängenden Teile eines (unzusammenhängenden) Graphen werden *Zusammenhangskomponenten* genannt. Die Menge von Knoten, mit denen ein bestimmter Knoten v durch eine Kante verbunden ist, heißt *Nachbarschaft* von v . Die Anzahl der Kanten, die von einem Knoten ausgehen, heißt *Grad* $\deg v$ von v . Eine Schleife wird dabei doppelt gezählt. Die bekannteste Aussage über die Grade in einem Graphen ist das sogenannte „Handschlaglemma“:

Satz 7.1 (Handschlaglemma) *Die Summe aller Grade in einem (Multi-)Graphen ist gleich dem Doppelten der Kantenanzahl. Insbesondere ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.*

Beweis: Der Grad eines Knotens gibt an, wieviele Kanten bei ihm enden. Die Summe aller Grade ist somit die Anzahl aller Kantenenden. Da jede Kante zwei Enden hat, folgt der erste Teil sofort. Die Summe aller Grade ist somit eine gerade Zahl, was nur möglich ist, wenn die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade ist. \square

Der Grund für die Bezeichnung „Handschlaglemma“ liegt in der folgenden Interpretation: bei einer Party begrüßen einander manche Gäste durch Händeschütteln. Wenn man für jede Person zählt, wieviele Hände sie geschüttelt hat, dann ist die Summe aller dieser Werte gleich dem doppelten der Anzahl aller Handschläge.

Die folgende Aufgabe ist im Grunde nur eine verkleidete Form des Handschlaglemmas. Sie zeigt aber, dass eine graphentheoretische Interpretation oftmals sehr nützlich sein kann. Einer der wesentlichen Punkte beim Lösen einer kombinatorischen Aufgabe besteht ja oft darin, die Aufgabenstellung geeignet mathematisch zu fassen. Gerade die „bildliche“ Darstellung durch einen Graphen ist hierbei manchmal von Vorteil.

Aufgabe 73 Auf einem Blatt Papier sind einige Geraden gezeichnet. Zeige, dass die Anzahl der Geraden, die mit einer ungeraden Anzahl von anderen Geraden einen Winkel $< 30^\circ$ einschließen, gerade ist.

Lösung: Wir ordnen jeder Gerade einen Knoten eines Graphen zu und verbinden zwei Knoten durch eine Kante genau dann, wenn die entsprechenden Geraden einen Winkel $< 30^\circ$ einschließen. Die Aufgabenstellung ist dann genau äquivalent zum zweiten Teil des Handschlaglemmas. \square

7.2 Euler- und Hamiltonkreise

In diesem Abschnitt sollen zwei bedeutende Begriffe der Graphentheorie erläutert werden, nämlich Euler- und Hamiltonkreise. Eulerkreise gehen auf das bekannte Königsberger Brückenproblem (Abbildung 7.2) zurück, das von Euler behandelt wurde: in Königsberg (heute Kaliningrad/Russland) führten seinerzeit sieben Brücken über den Fluss Pregel. Die

Frage war nun, ob es einen Weg gibt, bei dem alle sieben Brücken jeweils genau einmal überquert werden.

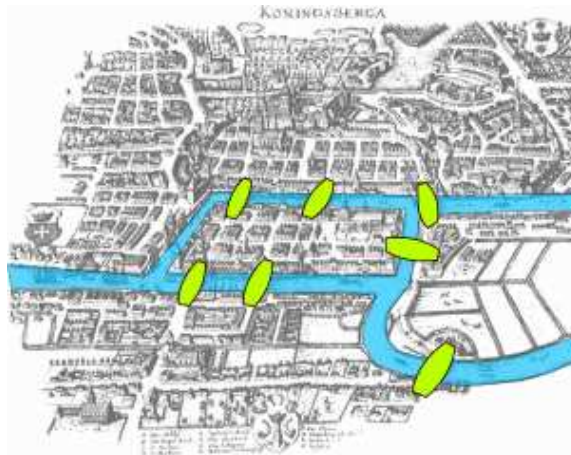


Abbildung 7.2: Königsberger Brückenproblem

Wir stellen die Brücken schematisch als Kanten in einem Multigraphen dar, wie in Abbildung 7.3 gezeigt. Graphentheoretisch lässt sich die Frage folgendermaßen formulieren:

Definition 7.2 Ein *Eulerweg* ist ein Weg in einem Graphen, der alle Kanten jeweils genau einmal verwendet. Ein *Eulerkreis* ist ein Eulerweg, bei dem Anfangs- und Endknoten übereinstimmen.

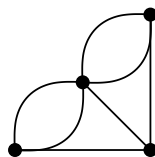


Abbildung 7.3: Königsberger Brückenproblem - schematische Darstellung

Satz 7.3 Ein zusammenhängender (Multi-)Graph besitzt genau dann einen Eulerweg, wenn höchstens zwei Knoten ungeraden Grad haben. Er besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn es keinen Knoten mit ungeradem Grad gibt.

Beweis: Um die Notwendigkeit der Bedingung zu zeigen, verwenden wir eine Art von Invariante. Es ist klar, dass ein Eulerweg, der in einen Knoten hineinführt, aus diesem auch wieder hinausführen muss. Dabei werden jeweils genau zwei Kanten, die in einem Knoten enden, verwendet. Die Anzahl der Kanten in einem Eulerweg, die in einem bestimmten

Knoten enden (und diese ist ja gleich der Anzahl aller Kanten, die in dem Knoten enden, also dem Grad des Knotens), muss folglich gerade sein. Eine Ausnahme bilden dabei höchstens Anfangs- und Endknoten.

Es bleibt zu zeigen, dass die Bedingung auch hinreichend ist, wobei wir uns zunächst auf Eulerkreise beschränken. Es seien also alle Knotengrade gerade. Wir betrachten den längstmöglichen Weg, der keine Kante zweimal benutzt. Da dieser nicht mehr verlängert werden kann, wurden alle Knoten, die vom Endpunkt ausgehen, benutzt; es handelt sich nach Voraussetzung um eine gerade Zahl. Aufgrund des obigen Arguments ist das nur möglich, wenn der Endpunkt mit dem Anfangspunkt zusammenfällt, es handelt sich also um einen Kreis.

Angenommen, dies wäre kein Eulerkreis. Dann muss es noch unverwendete Kanten geben, und da der Graph zusammenhängend ist, gibt es unter ihnen mindestens eine Kante, die von einem Knoten des Kreises ausgeht. Wenn man mit ihr beginnt und anschließend den Kreis durchläuft, so erhält man jedoch einen längeren Weg, der jede Kante höchstens einmal besucht, ein Widerspruch. Damit ist der Beweis für Eulerkreise abgeschlossen.

Wenn es nun genau zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt, so fügen wir eine Kante zwischen ihnen hinzu. Der entstehende Graph erfüllt dann die Bedingung für einen Eulerkreis. Entfernt man die künstlich eingefügte Kante aus dem Eulerkreis, so erhält man einen Eulerweg im ursprünglichen Graphen. \square

BEMERKUNG: Im Originalproblem ist also kein Rundgang der geforderten Art möglich, da alle vier Knoten ungeraden Grad haben.

Definition 7.4 Ein *Hamiltonweg* ist ein Weg in einem Graphen, der alle Knoten jeweils genau einmal besucht. Ein *Hamiltonkreis* ist ein geschlossener Weg, der alle Knoten jeweils genau einmal besucht.

Satz 7.5 (Satz von Dirac) Wenn in einem Graphen mit $n \geq 3$ Knoten jeder Knoten Grad $\geq n/2$ hat, dann besitzt der Graph einen Hamiltonkreis.

Beweis: Zunächst muss der Graph zusammenhängend sein: die kleinste Zusammenhangskomponente hätte sonst $\leq n/2$ Knoten, und ein jeder dieser Knoten könnte höchstens $n/2 - 1$ Nachbarn haben, ein Widerspruch.

Wir betrachten nun den längstmöglichen Weg, der keinen Knoten zweimal besucht. Dieser Weg sei v_1, v_2, \dots, v_m . Da der Weg maximal ist, liegen alle Nachbarn von v_1 und v_m auf dem Weg, denn sonst könnte man ihn verlängern. Es gibt $\deg v_1 \geq n/2$ Werte von i ($2 \leq i \leq m$), für die (v_1, v_i) eine Kante ist, und es gibt $\deg v_m \geq n/2$ Werte von i ($2 \leq i \leq m$), für die (v_{i-1}, v_m) eine Kante ist. Zusammen sind dies zumindest $n \geq m > m - 1$, sodass es nach dem Schubfachschlussprinzip zwei Werte gibt, für die beides zutrifft. Damit gibt es jedoch einen geschlossenen Weg $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_m, v_{m-1}, \dots, v_i, v_1$ (Abbildung 7.4). Dieser muss jedoch ein Hamiltonkreis sein, denn weil der Graph zusammenhängend ist, müsste es andernfalls einen Knoten w geben, der mit einem Knoten v_k des Kreises verbunden ist. Hängt man die Kante (v_k, w) jedoch an den Kreis an, dann ergäbe sich ein längerer Weg als v_1, \dots, v_m , im Widerspruch zur Annahme. \square

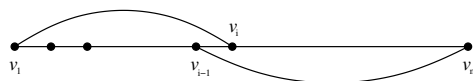


Abbildung 7.4: Zum Beweis von Satz 7.5

7.3 Ebene Graphen und die Eulersche Polyederformel

Definition 7.6 Ein *ebener Graph* ist ein Graph, dessen Knoten Punkte in der Ebene sind, und dessen Kanten Kurven sind, die die beiden Endpunkte miteinander verbinden. Weiters wird vorausgesetzt, dass die Kanten einander gegenseitig nicht schneiden. Abbildung 7.5 zeigt einen ebenen Graphen. Die Kanten des Graphen unterteilen die Ebene in Regionen, die man *Flächen* nennt.

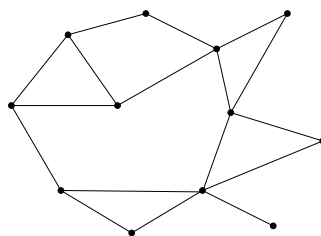


Abbildung 7.5: Ein ebener Graph.

Beispiele für ebene Graphen sind Netze von Polyedern, wie etwa Tetraeder und Würfel in Abbildung 7.6. Bei diesen entsprechen die Flächen des ebenen Graphen tatsächlich den Flächen des Polyeders. Der bekannteste Satz über ebene Graphen trägt daher auch den Namen *Eulersche Polyederformel*.

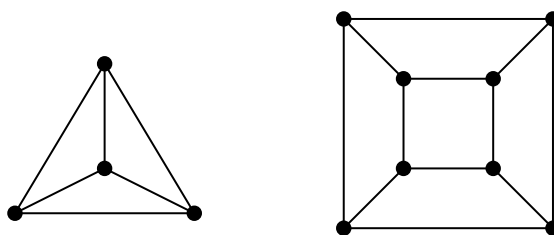


Abbildung 7.6: Netze von Tetraeder und Würfel.

Satz 7.7 (Eulersche Polyederformel) *Es sei e die Anzahl der Knoten (Ecken), k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen eines ebenen Graphen und c die Anzahl seiner Zusammenhangskomponenten. Dann gilt*

$$e - k + f = c + 1.$$

Insbesondere gilt für zusammenhängende ebene Graphen (und damit für Polyeder) die Formel $e - k + f = 2$.

Beweis: Wir beweisen die Formel durch Induktion nach der Anzahl der Kanten. Ist diese gleich 0, dann bildet jeder Knoten eine eigene Zusammenhangskomponente, und es gilt $e = c$, $f = 1$ und $k = 0$, sodass die Formel trivialerweise erfüllt ist. Für den Induktionsschritt haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

- Eine zusätzliche Kante verbindet zwei Zusammenhangskomponenten (Abbildung 7.7, links). In diesem Fall bleiben e und f gleich, k wächst um 1, während c um 1 sinkt. Damit bleibt die Formel aber erhalten.
- Eine zusätzliche Kante verbindet zwei Knoten, die zur gleichen Zusammenhangskomponente gehören. In diesem Fall wird eine Fläche in zwei Teile unterteilt (Abbildung 7.7, rechts). Dann wachsen k und f jeweils um 1, e und c bleiben gleich. Die Formel bleibt wiederum erhalten.

Damit ist die Induktion beendet. □

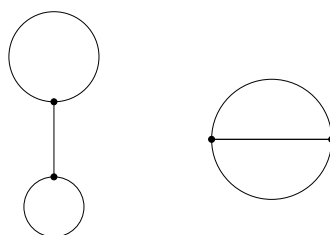


Abbildung 7.7: Zum Beweis von Satz 7.7

Aufgabe 74 Ist es möglich, fünf Gebäude paarweise mit Wegen zu verbinden, sodass sich keine zwei Wege überschneiden? (Brücken, Tunnels, etc. sind verboten.)

Lösung: Angenommen, dies wäre möglich. Dann würden die Gebäude zusammen mit den Wegen einen ebenen Graphen mit 5 Knoten und $\binom{5}{2} = 10$ Kanten bilden. Da es sich um einen zusammenhängenden Graphen handeln würde, wäre nach der Polyederformel die Anzahl der Flächen gleich $10 + 2 - 5 = 7$. Jede dieser Flächen hat mindestens drei Kanten an ihrem Rand, und jede Kante gehört zu höchstens zwei verschiedenen Flächen. Es folgt, dass die Anzahl der Kanten mindestens gleich $\frac{3f}{2}$ ist. In diesem Fall wäre jedoch $\frac{3f}{2} \geq \frac{21}{2} > 10$, ein Widerspruch. Daher lässt sich eine solche Anordnung nicht verwirklichen. □

7.4 Ramsey-Zahlen

Wir setzen hier die Aufgabe 44 fort. Allgemein stellen wir uns einen *vollständigen Graphen* (d.h. alle Knoten sind paarweise miteinander verbunden), dessen Kanten in k Farben

eingefärbt werden. Wir behaupten, dass es bei einer genügend großen Anzahl von Knoten immer ein *monochromatisches Dreieck* gibt, also drei Knoten, deren Verbindungskanten gleich gefärbt sind. Im ersten Beispiel entspricht „kennen – nicht kennen“ zwei Farben, im zweiten Beispiel entsprechen die Themen drei verschiedenen Farben.

Wir definieren die Folge n_k durch $n_1 = 3$ und $n_k = kn_{k-1} - k + 2$. Es lässt sich zeigen, dass $n_k = \lfloor k!e \rfloor + 1$ gilt, aber das ist hier nicht weiter von Bedeutung. Wir zeigen mittels Induktion, dass es in einem vollständigen Graphen mit n_k Knoten, dessen Kanten in k Farben gefärbt werden, immer ein monochromatisches Dreieck gibt. Für $k = 1$ ist dies trivial. Für den Induktionsschritt betrachten wir wieder einen beliebigen Knoten. Da er $kn_{k-1} - k + 1 = k(n_{k-1} - 1) + 1$ Nachbarn hat, muss er nach dem Schubfachschlussprinzip mit n_{k-1} von ihnen durch Kanten derselben Farbe verbunden sein. Wenn es unter ihnen zwei gibt, die ebenfalls durch eine Kante dieser Farbe verbunden sind, haben wir bereits ein monochromatisches Dreieck gefunden. Andernfalls bleiben für die n_{k-1} Knoten nur noch $k - 1$ Farben, sodass die Induktionsannahme zum Zug kommt. \square

Es gilt noch allgemeiner der folgende Satz:

Satz 7.8 (Satz von Ramsey) *Für beliebige natürliche Zahlen k, r gibt es eine natürliche Zahl n , sodass ein vollständiger Graph mit n Knoten, dessen Kanten in k Farben eingefärbt werden, immer eine Menge von r Knoten enthält, deren Verbindungskanten nur eine einzige Farbe tragen.*

7.5 Weitere Aufgaben

Aufgabe 75 Beim Vorbereitungskurs in Raach wird sehr viel Tischtennis gespielt. Zeige, dass es zwei SchülerInnen gibt, die dabei gegen gleich viele verschiedene Gegner gespielt haben.

Aufgabe 76 Die Ritter an König Artus' Tafelrunde sind teils befreundet, teils verfeindet. Jedoch hat jeder Ritter mehr Freunde als Feinde. Zeige, dass Artus seine Leute derart um die Tafel versammeln kann, dass keiner unmittelbar neben einem seiner Feinde sitzt.

Aufgabe 77 Von neun Punkten in der Ebene liegen keine drei auf einer Geraden. Zwischen den Punkten werden nun die Verbindungsstrecken in den Farben blau und grün gezeichnet. Dabei enthält jedes Dreieck mindestens eine blaue Seite. Zeige, dass es vier Punkte gibt, sodass alle Verbindungsstrecken zwischen ihnen blau sind.

Aufgabe 78 Im 183-köpfigen österreichischen Parlament bricht ein Tumult aus, bei dem jede(r) Abgeordnete genau eine(n) anderen beschimpft. Nach dem Vorfall soll ein Untersuchungsausschuss aus 61 Personen zur Klärung eingesetzt werden. Zeige, dass man den Ausschuss derart zusammenstellen kann, dass keines der Mitglieder ein anderes beschimpft hat.

Aufgabe 79 Drei Gebäude sollen jeweils Leitungen zum Gas-, Wasser- und Elektrizitätswerk erhalten. Ist es möglich, die Leitungen derart zu planen, dass sich keine zwei von ihnen überkreuzen?

Aufgabe 80 Zehn Fluggesellschaften bieten Flüge zwischen 2006 verschiedenen Städten an. Zwischen je zwei beliebigen Städten gibt es jeweils eine Linie einer Gesellschaft, die in beide Richtungen verkehrt. Zeige, dass es eine Fluggesellschaft gibt, mit der man einen Rundflug machen kann, der eine ungerade Anzahl von Städten besucht.

Kapitel 8

Vermischtes

8.1 Induktionsbeweise in der Kombinatorik

Wir haben bereits einige Male Induktion zum Beweis verschiedener Sätze verwendet; es handelt sich bei ihr also bei weitem nicht allein um ein Mittel, um gewisse Gleichungen oder Ungleichungen für natürliche Zahlen zu zeigen. Es ist daher nicht weiter verwunderlich, dass viele Olympiadaufgaben mit einem kombinatorischen Einschlag mittels Induktion gelöst werden können. Im folgenden Beispiel etwa erleichtert ein induktiver Ansatz die Argumentation:

Aufgabe 81 In einer beliebig großen Tabelle werden n Felder vorgegeben. Zeige, dass man diese derart mit zwei Farben (rot und blau) färben kann, dass sich in jeder Zeile und jeder Spalte die Anzahl der roten Felder von der Anzahl der blauen Felder um höchstens 1 unterscheidet.

Lösung: Die Aussage ist für $n = 0$ oder $n = 1$ trivial (mit diesem Wort sollte sparsam umgegangen werden, hier ist es aber vielleicht berechtigt). Für größere Werte von n unterscheiden wir drei Fälle:

1. Von den vorgegebenen Feldern bilden vier die Ecken eines Rechtecks. In diesem Fall färbe man alle übrigen Felder (was nach Induktionsvoraussetzung möglich ist) gemäß der Bedingung und färbe je zwei diagonal gegenüberliegende Felder rot bzw. blau, sodass sich wiederum eine zulässige Färbung ergibt.
2. Von den vorgegebenen Feldern gibt es drei, die Ecken eines Rechtecks sind (die vierte Ecke gehört nicht dazu). Diese drei entfernt man, fügt dafür die vierte hinzu und färbt gemäß Induktionsvoraussetzung. Wird dabei das hinzugefügte Feld rot (blau) gefärbt, dann färbt man stattdessen die beiden anliegenden Ecken rot (blau) und die vierte Ecke blau (rot), wodurch sich wieder eine zulässige Färbung ergibt.
3. Wenn beide Fälle nicht zutreffen, dann wähle man eine beliebige Zeile oder Spalte, in der mehr als ein Feld vorgegeben ist (wenn es auch das nicht gibt, dann kann

man ganz beliebig färben). Die Felder dieser Zeile bzw. Spalte färbe man so, dass sich die Anzahl der roten Felder von der Anzahl der blauen Felder um höchstens 1 unterscheidet. Davon bleiben alle anderen Felder unberührt, sodass diese wieder gemäß Induktionsvoraussetzung gefärbt werden können.

□

Oft kann man auch Induktion verwenden, um allgemeine Vermutungen zu bestätigen, wie etwa hier:

Aufgabe 82 Gegeben seien zehn verschiedene Gewichte, die der Reihe nach 1, 2, 4, \dots , 512 Gramm wiegen. Ein Objekt von ganzzahliger Masse M wird gewogen, indem man es mit den zehn Gewichten auf die beiden Seiten einer Balkenwaage verteilt.

- Zeige, dass kein Objekt auf mehr als 89 Arten gewogen werden kann.
- Gib ein Beispiel für M an, sodass es genau 89 Arten gibt das Objekt zu wiegen.

Lösung: Statt uns gleich an die Originalaufgabe zu machen, versuchen wir zunächst, einfachere Fälle mit weniger Gewichten zu lösen: wenn man nur ein Gewicht mit 1 Gramm besitzt, kann man nur ein Objekt mit 1 Gramm wiegen, und auch das nur auf eine Art. Wenn man Gewichte zu 1 und 2 Gramm besitzt, dann kann man ein Objekt mit einer Masse von 1 Gramm bereits auf 2 Arten wiegen, und kein anderes Objekt auf mehr Arten. Bei Gewichten zu 1, 2 und 4 Gramm lässt sich ein Objekt mit 1 oder 3 Gramm bereits auf drei Arten wiegen. Wenn man eventuell noch weitere Fälle untersucht, kommt man zu der Vermutung, dass die maximale Anzahl von Wiegemöglichkeiten (die wir mit w_n bezeichnen) mit den n Gewichten 1, 2, \dots , 2^{n-1} genau der Fibonaccizahl f_{n+1} ($f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$) entspricht. Für $n = 1$ und $n = 2$ ist dies offenbar richtig.

Nun kommen wir zum Induktionsschritt, bei dem wir zwei Fälle für das zu wiegende Objekt betrachten:

- Das Objekt hat eine geradzahlige Masse. In diesem Fall kann man das 1- Gramm-Gewicht nicht verwenden, es bleiben $n - 1$ Gewichte mit 2, 4, \dots Gramm. Dividiert man alle Massen durch 2 (was der Wahl einer neuen Einheit entspricht), so erkennt man, dass sich das Problem auf den Fall mit $n - 1$ Gewichten reduziert hat, und man nur höchstens w_{n-1} Möglichkeiten hat.
- Das Objekt hat ungeradzahlige Masse M . Dann hat man für das 1- Gramm-Gewicht zwei Möglichkeiten: man kann es auf dieselbe Seite wie das Objekt oder auf die andere legen. Dann steht man vor dem Problem, $M \pm 1$ mit den Gewichten 2, 4, 8, \dots zu wiegen. Von den Zahlen $M + 1$, $M - 1$ ist eine durch 4 teilbar, die andere nicht. In einem Fall dividieren wir alle Massen durch 4 (das 2- Gramm-Gewicht kann nicht verwendet werden), im anderen Fall durch 2. Wieder haben wir das Problem auf einfachere Fälle zurückgeführt, nämlich auf jene mit $n - 2$ bzw. $n - 1$ Gewichten. Die maximale Anzahl der Möglichkeiten ist somit $\leq w_{n-1} + w_{n-2}$, womit bereits gezeigt ist, dass die Fibonaccizahlen eine obere Schranke bilden.

Schließlich haben wir noch eine Masse M anzugeben, die sich auf f_{n+1} Arten wiegen lässt. Wir zeigen mittels Induktion, dass

$$M = \begin{cases} \frac{2^{n+1}}{3} & n \text{ ungerade} \\ \frac{2^n - 1}{3} & n \text{ gerade} \end{cases}$$

diese Bedingung erfüllt. Für $n = 1$ und $n = 2$ ist dies wieder sehr leicht zu sehen. Der Induktionsschritt verwendet wieder obiges Argument. Im ersten Fall (n ungerade) ist $M = \frac{2^{n+1}}{3}$, $M + 1 = 4 \cdot \frac{2^{n-2} + 1}{3}$ durch 4 teilbar. Wenn also das 1-Gramm-Gewicht auf die gleiche Seite gelegt wird wie das Objekt, dann gibt es nach Induktionsannahme f_{n-1} Möglichkeiten.

Andererseits ist $M - 1 = 2 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{3}$, sodass es nach Induktionsannahme f_n Möglichkeiten zur Wiegung gibt, wenn man das 1-Gramm-Gewicht auf die andere Seite legt. Zusammen ergeben sich also $f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$ Möglichkeiten. Der zweite Fall (n gerade) lässt sich analog abhandeln.

In unserem konkreten Fall ist die Fibonaccizahl f_{11} gleich 89, und ein Objekt mit $\frac{2^{10} - 1}{3} = 341$ Gramm lässt sich tatsächlich auf 89 Arten wiegen. \square

8.2 Kombinatorische Geometrie

Auch in der Geometrie finden sich mitunter kombinatorische Ideen – auf einige Beispiele sind wir bereits gestoßen. Da es jedoch schwer ist, eine einheitliche Theorie oder Richtlinie zur Lösung von Aufgaben der kombinatorischen Geometrie bereitzustellen, werden hier nur exemplarisch zwei Aufgaben vorgeführt.

Aufgabe 83 Von n Punkten der Ebene ist bekannt, dass jedes von drei dieser Punkte gebildete Dreieck einen Flächeninhalt ≤ 1 hat. Zeige, dass es dann ein Dreieck mit Flächeninhalt ≤ 4 gibt, das alle n Punkte enthält.

Lösung: Diese Aufgabe ist ein gutes Beispiel für das allgemein sehr nützliche *Extremalprinzip*, bei dem man unter verschiedenen Objekten das größte/kleinste auswählt und damit argumentiert. In diesem Fall wählen wir unter allen Dreiecken, die von drei der vorgegebenen Punkte gebildet werden, das größte aus und bezeichnen es mit ABC . Nach Voraussetzung hat es Flächeninhalt ≤ 1 . Keiner der übrigen Punkte darf weiter entfernt von einer der Seiten dieses Dreiecks liegen als der jeweils gegenüberliegende Punkt, da es sonst ein größeres Dreieck gäbe. Das bedeutet jedoch, dass alle Punkte innerhalb eines zu ABC ähnlichen Dreiecks liegen (das von den Parallelen zu den Seiten durch die gegenüberliegenden Eckpunkte gebildet wird), das um den Faktor -2 gestreckt ist und somit Flächeninhalt ≤ 4 hat (Abbildung 8.1). \square

Aufgabe 84 (Iran 1999) Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Zeige: wenn alle Punkte der Ebene mit den beiden Farben rot und grün gefärbt werden, dann gibt es entweder zwei rote Punkte mit Abstand 1 oder drei grüne Punkte, die ein zu ABC kongruentes Dreieck bilden.

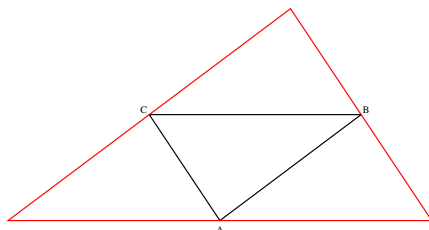


Abbildung 8.1: Das Dreieck ABC und der Bereich, in dem alle Punkte liegen müssen.

Lösung: Es seien $a \leq b \leq c$ die Seitenlängen des Dreiecks ABC . Wir nehmen an, dass es weder zwei rote Punkte mit Abstand 1 noch drei grüne Punkte, die ein zu ABC kongruentes Dreieck bilden, gibt.

Wir nehmen zunächst an, es gäbe zwei rote Punkte M, N mit Abstand a . Weiters sei P derart, dass PMN zu ABC kongruent ist. Die Kreise um M und N mit Radius 1 sind vollständig grün, da es sonst zwei rote Punkte mit Abstand 1 gäbe. Folglich muss der Kreis um P mit Radius 1 vollständig rot sein, sonst gäbe es ein grünes, zu ABC ähnliches Dreieck, das sich durch Verschiebung aus PMN ergibt. Es gibt jedoch auf diesem Kreis zwei Punkte mit Abstand 1 (die mit P ein gleichseitiges Dreieck bilden), ein Widerspruch.

Somit kann es keine zwei roten Punkte mit Abstand a geben. Wenn es gar keine roten Punkte gibt, ist alles trivial. Daher können wir einen roten Punkt R wählen und den Kreis mit Radius a um R betrachten. Dieser muss dann vollständig grün sein. Auf ihm gibt es zu jedem Punkt S einen Punkt T , der von S einen Abstand von a hat (und mit R, S ein gleichseitiges Dreieck bildet). Da a die kleinste Dreieckseite ist, gibt es einen Punkt U außerhalb des Kreises um R , der mit S, T ein zu ABC kongruentes Dreieck bildet. Der Punkt U muss dann rot sein. Wenn man nun jedoch S auf dem Kreis um R rotieren lässt, dann beschreibt der zugehörige Punkt U auch einen Kreis um R , dessen Radius größer als a ist. Alle Punkte auf diesem Kreis müssen rot sein. Da es jedoch auf ihm zwei Punkte mit Abstand a geben muss, erhalten wir einen Widerspruch. \square

8.3 Mathematische Spiele

Gelegentlich tauchen in Olympiadebewerben Aufgaben vor, bei denen zwei (selten auch mehrere) Personen ein bestimmtes Spiel spielen und nach Strategien für die Spieler oder nach dem Ausgang des Spiels bei beiderseits perfekter Vorgangsweise gefragt wird. Im Wesentlichen sind hier zwei Grundideen von Bedeutung: das Erkennen von gewissen Symmetrien (das natürlich ein allgemein wichtiges Prinzip für kombinatorische Aufgaben ist) und das Auffinden von Gewinnstellungen. Um diese zu erläutern, wird hier jeweils ein Beispiel jedes Typs präsentiert.

Aufgabe 85 Zwei Personen spielen ein $(O - X)$ -Spiel auf einem quadratischen 10×10 -Spielfeld nach folgenden Regeln: zuerst werden die Felder abwechselnd mit dem jeweiligen

eigenen Zeichen markiert (X beginnt). Anschließend werden die Zahlen A und B bestimmt, wobei A die Anzahl zusammenhängender Fünfergruppen von X auf Linien parallel zu den Quadratseiten oder -diagonalen (6 aufeinanderfolgende X zählen also 2 Punkte, 7 aufeinanderfolgende X 3 Punkte, etc.), B die entsprechende Zahl für O . Der erste Spieler gewinnt, wenn $A > B$ ist, der zweite, wenn $A < B$. Bei $A = B$ endet das Spiel unentschieden. Gibt es für den ersten Spieler eine Strategie, mit der er unabhängig vom Spiel des Gegners (a) immer gewinnt, (b) nie verliert?

Lösung: Diese Aufgabe lässt sich mit einem einfachen Symmetrieprinzip lösen: der zweite Spieler erreicht stets ein Unentschieden, indem er jeden Zug des ersten Spielers am Mittelpunkt des Spielfeldes spiegelt. Auf diese Weise entsteht am Ende eine symmetrische Stellung, in der $A = B$ sein muss, da jeder X -Fünfergruppe punktsymmetrisch eine O -Fünfergruppe entspricht.

Andererseits kann der erste Spieler sehr leicht einen Verlust vermeiden. Generell gilt dies für alle Spiele mit symmetrischen Voraussetzungen, bei denen das Ausführen eines Zuges nicht von Nachteil sein kann (was hier offenbar der Fall ist). Er setzt zu Beginn auf ein beliebiges Feld. Anschließend spiegelt er jeden Zug am Mittelpunkt. Wenn das entsprechende Feld schon mit einem eigenen X besetzt ist, kann wieder ein beliebiger Zug ausgeführt werden. Auf diese Weise kann auch der erste Spieler eine symmetrische Endstellung forcieren, sodass das Spiel bei bestmöglicher Strategie stets unentschieden enden muss. \square

Die Suche nach Gewinnstellungen ist vor allem dann sehr hilfreich, wenn zwei Spieler abwechselnd ziehen und dabei dieselben Zugmöglichkeiten haben. Wir definieren eine *Gewinnstellung* dadurch, dass ein Spieler (bei bestmöglichem Spiel) gewinnt, wenn er sie nach seinem Zug zurücklässt. Alle übrigen Spielpositionen bezeichnen wir als *Verluststellungen*. Es gelten die folgenden Regeln, die sehr einfach einzusehen sind:

- Eine Stellung ist genau dann eine Verluststellung, wenn es mindestens einen Zug gibt, der sie in eine Gewinnstellung überführt (dieser Zug sollte dann ausgeführt werden).
- Eine Stellung ist genau dann eine Gewinnstellung, wenn es keinen Zug gibt, der sie in eine Gewinnstellung überführt (andernfalls könnte der sich nunmehr am Zug befindliche Spieler einen solchen Gewinnzug machen).

Dadurch sind Gewinnstellungen gewissermaßen rekursiv erklärt. Durch die Regeln wird festgelegt, ob die Endstellungen Gewinn- oder Verluststellungen sind.

Aufgabe 86 (Italien 1999) Alice und Bob spielen das folgende Spiel: auf einem Tisch liegen 1999 Kugeln. Abwechselnd nehmen die Spieler nun Kugeln weg (Bob beginnt), und zwar in jedem Zug mindestens eine und höchstens die Hälfte. Der Spieler, der nur noch eine Kugel übrig lässt, verliert. Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

Lösung: Eine Stellung ist bei diesem einfachen Spiel durch die Anzahl der noch vorhandenen Kugeln gegeben. Wir haben herauszufinden, für welche Kugelzahlen n sich eine

Gewinnstellung ergibt. Die Regeln legen dabei bereits fest, dass es sich bei $n = 1$ um eine Verluststellung handelt. Folglich muss es sich bei $n = 2$ um eine Gewinnstellung handeln, denn es gibt nur einen Zug. Für $n = 3$ und $n = 4$ kann man jeweils einen Zug machen, der nur 2 Kugeln übrig lässt, also handelt es sich um Verluststellungen. $n = 5$ ist dagegen wieder eine Gewinnstellung. Allgemein zeigen wir, dass es sich bei $n = 3 \cdot 2^k - 1$ um eine Gewinnstellung handelt (alle anderen Werte von n sind Verluststellungen). Da 1999 nicht von dieser Form ist, gewinnt Bob (indem er 462 Kugeln entfernt und damit zur Gewinnstellung mit $3 \cdot 2^9 = 1537$ Kugeln übergeht).

Wir beweisen die Formel nun induktiv. Für $k = 0$ ist bereits alles gezeigt. Wir nehmen an, dass $3 \cdot 2^k - 1$ eine Gewinnstellung ist. Nun kann man für $n = 3 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k + 1, \dots, 3 \cdot 2^{k+1} - 2$ jeweils so viele Kugeln entfernen, dass nur noch $3 \cdot 2^k - 1$ übrigbleiben und man gewinnt. Daher handelt es sich dabei um Verluststellungen. Andererseits ist ein solcher Zug für $n = 3 \cdot 2^{k+1} - 1$ nicht erlaubt, da man mehr als die Hälfte der Kugeln entfernen müsste. Es bleibt nichts anderes übrig, als in eine der zuvor genannten Verluststellungen überzugehen. Somit ist $n = 3 \cdot 2^{k+1} - 1$ eine Gewinnstellung, womit die Induktion beendet ist. \square

8.4 Das Prinzip des doppelten Abzählens

Ein sehr elegantes Prinzip, das bei kombinatorischen Aufgaben zur Anwendung kommt, ist das *doppelte Abzählen*. Hierbei wird eine bestimmte Größe auf zwei verschiedene Arten berechnet und die Ergebnisse verglichen, sodass eine Identität zustande kommt. Es kann auch sein, dass man eine obere und eine untere Schranke findet und diese vergleicht. Es simples Beispiel, das diese Idee illustriert, ist eine Tabelle, deren Einträge Zahlen sind. Die Gesamtsumme aller Einträge kann man auf zwei Arten bestimmen: man kann zeilenweise Summen bilden und dann alle diese Summen addieren, oder man kann spaltenweise Summen bilden und addieren. Bei beiden Operationen sollte man natürlich zum gleichen Ergebnis kommen.

Werfen wir nun jedoch einen Blick auf zwei Beispiele diese Idee:

Aufgabe 87 (IMO Shortlist 2004) An einer Universität studieren 10001 Studenten. Manche dieser Studenten schließen sich zu Klubs zusammen, wobei ein Student auch mehreren Klubs angehören kann. Einige der Klubs schließen sich ihrerseits zu Gemeinschaften zusammen, wobei ein Klub auch mehreren Gemeinschaften angehören kann. Die Anzahl der Gemeinschaften sei k . Wir nehmen an, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Je zwei Studenten gehören genau einem gemeinsamen Klub an.
- Jeder Student ist in genau einem Klub einer jeden Gemeinschaft.
- Jeder Klub hat eine ungerade Anzahl von Mitgliedern. Ein Klub mit $2m + 1$ Mitgliedern gehört außerdem stets genau m Gemeinschaften an.

Man bestimme alle möglichen Werte von k .

Lösung: Wir stellen uns die Situation als Organigramm vor, in dem oben die Gesellschaften stehen, in der Mitte die Klubs und unten die Studenten. Zugehörigkeitslinien werden zwischen Klubs und Gesellschaften bzw. Studenten und Klubs gezeichnet. Wir bestimmen nun die Anzahl der Verbindungen Student-Gesellschaft auf zwei Arten:

- Da jeder Student genau einem Klub jeder Gesellschaft angehört, gibt es zu jedem Paar Student-Gesellschaft genau eine Verbindung. Diese Anzahl beträgt somit $10001k$.
- Jeder Klub mit $2m+1$ Mitgliedern erzeugt $m(2m+1)$ Verbindungen. Sind also $2m_1+1, 2m_2+1, \dots, 2m_r+1$ die Mitgliederzahlen, dann ist die Anzahl der Verbindungen

$$\sum_{i=1}^r m_i(2m_i+1).$$

Diese beiden Werte müssen übereinstimmen. Andererseits zählen wir auf zwei Arten die Studentenpaare: einerseits sind dies natürlich genau $\binom{10001}{2}$. Andererseits gehört jedes Paar genau einem gemeinsamen Klub an, und ein Klub mit $2m+1$ Mitgliedern erzeugt genau $\binom{2m+1}{2}$ solche Paare. Folglich gilt

$$\sum_{i=1}^r \binom{2m_i+1}{2} = \binom{10001}{2}.$$

Beachten wir nun noch $\binom{2m+1}{2} = m(2m+1)$, dann folgt

$$10001k = \sum_{i=1}^r m_i(2m_i+1) = \sum_{i=1}^r \binom{2m_i+1}{2} = \binom{10001}{2}$$

oder $k = \frac{1}{10001} \binom{10001}{2} = 5000$. □

Aufgabe 88 (Taiwan 2000) Es sei $S = \{1, \dots, 100\}$. P bezeichne die Familie aller 49-elementigen Teilmengen von S . Jeder Menge T in P wird eine zufällige Zahl $n(T)$ aus S zugeordnet. Zeige, dass man eine 50-elementige Teilmenge M von S derart auswählen kann, dass für kein $x \in M$ $n(M \setminus \{x\}) = x$ gilt.

Lösung: Die Anzahl 50-elementiger Teilmengen ist $\binom{100}{50}$. Wenn wir zeigen können, dass die Anzahl a „verbotener“ Teilmengen (also solcher, für die es ein $x \in M$ mit $n(M \setminus \{x\}) = x$ gibt) kleiner ist, dann ist die Aufgabe gelöst. Nun gehört aber zu jeder Menge $T \in P$ höchstens eine verbotene Menge, nämlich $T \cup \{n(T)\}$ (sofern $n(T) \notin T$ und damit diese Menge tatsächlich 50 Elemente enthält). Die Anzahl verbotener Mengen ist somit höchstens gleich der Anzahl der Elemente von P , nämlich $\binom{100}{49}$. Es gilt aber

$$\binom{100}{49} = \frac{50}{51} \binom{100}{50} < \binom{100}{50},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Allgemein wachsen ja die Zahlen im Pascalschen Dreieck bis zur Mitte an und fallen dann wieder. □

8.5 Weitere Aufgaben

Aufgabe 89 Ein Spielfeld besteht aus n in einer Reihe angeordneten Feldern. Auf jedem Feld liegt ein Spielstein. Im ersten Zug darf nun ein beliebiger Spielstein auf ein benachbartes Feld ziehen, wobei der Spielstein auf den dortigen Stein gelegt wird, wodurch ein Stoß aus zwei Steinen entsteht (zu Beginn gibt es also zwei mögliche Züge mit jedem Stein, die Randsteine ausgenommen). In weiterer Folge zieht der Stoß immer um so viele Felder weiter, wie sich Steine in ihm befinden. Landet der Stoß auf einem besetzten Feld, so wächst er um diesen Stein an. Beweise, dass es möglich ist, innerhalb von $n - 1$ Zügen alle Spielsteine in einem Stoß zu vereinigen.

Aufgabe 90 Aus einer Menge M von Zahlen werden $2^n - 2$ ($n > 1$) Teilmengen gewählt, von denen jede mehr als die Hälfte der Zahlen von M enthält. Zeige, dass man $n - 1$ Elemente von M so auswählen kann, dass jede der vorgegebenen Teilmengen zumindest eines dieser Elemente enthält.

Aufgabe 91 (IMO 1997) Eine $n \times n$ -Matrix mit Einträgen aus der Menge $S = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$ heißt *silberne Matrix*, falls für jedes $i = 1, \dots, n$ die i -te Zeile und die i -te Spalte zusammen alle Elemente von S enthalten. Man zeige:

1. Es gibt keine silberne Matrix für $n = 2005$.
2. Silberne Matrizen gibt es für unendlich viele Werte von n .

Aufgabe 92 Zeige: es gibt eine Konfiguration von $n(n + 1)$ Punkten in der Ebene derart, dass zu jedem k mit $1 \leq k \leq 2n$ eine Gerade existiert, die durch genau k der Punkte geht.

Aufgabe 93

- a. Bestimme die kleinste Anzahl von Geraden, die man derart auf ein 3×3 -Schachbrett zeichnen kann, dass von jedem Feld des Bretts ein innerer Punkt auf einer der Geraden liegt. Zeichne eine minimale Konfiguration und beweise, dass die Anzahl minimal ist.
- b. Wie a., jedoch für ein 4×4 -Brett.

Aufgabe 94 (BWB Deutschland 2005) In der Ebene liegen n Kreise ($n \geq 2$), sodass jeder Kreis jeden anderen zweimal schneidet und alle diese Schnittpunkte paarweise verschieden sind. Jeder Schnittpunkt wird mit einer von n Farben so gefärbt, dass jede Farbe wenigstens einmal verwendet wird und auf jedem der Kreise die gleiche Anzahl k von Farben vertreten ist. Man bestimme alle Werte von n und k , für die eine solche Färbung möglich ist.

Aufgabe 95 (IMO Shortlist 2000) Zehn Gangster stehen in einem Raum, sodass die Distanzen zwischen je zweien paarweise verschieden sind. Gleichzeitig schießen nun alle auf den jeweils am nächsten stehenden Gangster. Auf wieviele Personen wird mindestens geschossen?

Aufgabe 96 Auf einem gewöhnlichen 8×8 -Schachbrett wird folgendes Spiel gespielt: der erste Spieler platziert eine Dame auf einem Feld am rechten oder oberen Rand. anschließend ziehen die Spieler abwechselnd mit der Dame, und zwar beliebig weit nach unten, links oder links unten. Es gewinnt, wer die linke untere Ecke erreicht. Wie geht dieses Spiel bei beiderseits perfekter Strategie aus?

Aufgabe 97 Eine Tafel Schokolade besteht aus 9×6 Rippen, kann also in 54 Stücke zerbrochen werden. Zwei Spieler teilen sich die Tafel nach folgenden Regeln: die Spieler dürfen abwechselnd eine Rippe von der Tafel abbrechen und aufessen, danach kommt der jeweils andere an die Reihe. Wird zu irgend einem Zeitpunkt ein zwei Rippen breites Stück in die beiden Rippen zerteilt, dann bekommen beide jeweils eine davon. Zeige, dass der beginnende Spieler so spielen kann, dass er unabhängig vom Spiel seines Gegners zumindest 6 Stücke mehr essen kann. Ist es möglich, diese Strategie auch noch zu verbessern, d.h. mit Sicherheit noch mehr als 30 Stücke zu ergattern?

Aufgabe 98 (IMO Shortlist 1994) Auf einem 5×5 -Brett markieren zwei Spieler abwechselnd freie Felder, bis kein Feld mehr frei ist. Der erste Spieler markiert die Felder mit 1, der zweite mit 0. Für jedes der 9 3×3 -Teilquadrate des Bretts wird die Summe der 9 Zahlen in den Feldern bestimmt. Das Maximum dieser 9 Summen wird mit A bezeichnet. Wie groß kann der erste Spieler A – unabhängig von der Spielstrategie des zweiten Spielers – machen?

Aufgabe 99 (IMO Shortlist 2004) A und B spielen das folgende Spiel: eine positive ganze Zahl N wird vorgegeben. A schreibt zunächst 1 auf eine Tafel, anschließend wird abwechselnd gezogen. In jedem weiteren Zug wird die Zahl n auf der Tafel gelöscht und durch $n + 1$ oder $2n$ ersetzt. Derjenige Spieler, der N überschreitet, verliert. Für welche Werte von N hat B eine Gewinnstrategie?

Aufgabe 100 (Baltic Way 2004) A und B spielen das folgende Spiel: beginnend mit einem Haufen von $n \geq 4$ Steinen dürfen die beiden Spieler abwechselnd einen Haufen mit zumindest 4 Steinen in zwei kleinere (nichtleere) Haufen teilen (A beginnt). Wer keinen Zug mehr machen kann, verliert. Für welche Werte von n hat A eine Gewinnstrategie?

Aufgabe 101 (Italien 1999) Es seien X eine Menge mit n Elementen und A_1, \dots, A_m Teilmengen von X mit

- $|A_i| = 3, i = 1, \dots, m.$
- $|A_i \cap A_j| \leq 1$ für jedes Paar $i \neq j.$

Zeige, dass es eine Teilmenge von X mit mindestens $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ Elementen gibt, die kein A_i als Teilmenge enthält.

Aufgabe 102 (IMO 1998) Bei einem Wettbewerb gibt es a Teilnehmer und b Preisrichter, wobei $b \geq 3$ eine ungerade ganze Zahl ist. Jeder der Preisrichter beurteilt jeden

Teilnehmer mit „bestanden“ oder „durchgefallen“. Für die Zahl k gelte: je zwei Preisrichter stimmen mit ihren Urteilen bei höchstens k Teilnehmern überein. Man beweise: $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

Aufgabe 103 (IMO 2001) 21 Mädchen und 21 Burschen nahmen an einem Mathematik-Wettbewerb teil. Es stellte sich dabei heraus, dass niemand mehr als 6 Aufgaben gelöst hatte, und dass für jedes mögliche Paar aus einem Mädchen und einem Burschen zumindest ein Beispiel von beiden gelöst wurde. Zeige, dass zumindest eine der Aufgaben von mindestens drei Mädchen und mindestens drei Burschen gelöst wurde.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Aigner. *Diskrete Mathematik*. Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 5. Ausgabe, 2004.
- [2] R. Bodendiek and G. Borusch. *Streifzüge durch die Kombinatorik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1995.
- [3] D. Fomin, S. Genkin, and I. Itenberg. *Mathematical circles (Russian experience)*, volume 7 of *Mathematical World*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [4] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Reading, MA, 1989.
- [5] M. S. Klamkin. *International Mathematical Olympiads 1978–1985 and forty supplementary problems*, volume 31 of *New Mathematical Library*. Mathematical Association of America, Washington, DC, third edition, 1999.