Taylorpolynome in mehreren Variablen

Für eine Funktion $y = f(x)$ ist das Taylorpolynom n-ten Grades im Punkt x_0 bekanntermaßen

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots
\end{aligned}
$$

Ist $z = f(x,y)$ eine Funktion in zwei Variablen, dann können wir zunächst das Taylorpolynom bezüglich x bestimmen:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y) + f_x(x_0,y)(x-x_0) + \frac{f_{xx}(x_0,y)}{2}(x-x_0)^2 + \dots$$

und in weiterer Folge auch bezüglich y:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) \approx f(x_0,y_0) &+ f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{f_{yy}(x_0,y_0)}{2}(y-y_0)^2 + \dots \\
&+ f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \dots \\
&+ \frac{f_{xx}(x_0,y_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots
\end{aligned}
$$

Wir fassen zusammen:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) \approx f(x_0,y_0) &+ \left(f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\right) \\
&+ \frac{1}{2}\Big(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\
&\quad + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big) + \dots \\
&\dots + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n f}{\partial_x^{n-j}\partial_y^j}(x_0,y_0)(x-x_0)^{n-j}(y-y_0)^j
\end{aligned}
$$

ist das Taylorpolynom n-ten Grades. Man kann auch ein Restglied für die Approximation der Funktion durch das Taylorpolynom angeben:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial_x^{n+1-j} \partial_y^j}(x_0+\vartheta(x-x_0), y_0+\vartheta(y-y_0)) \\ (x-x_0)^{n+1-j}(y-y_0)^j$$

für ein ϑ zwischen 0 und 1. Man kann dies auch auf Funktionen in mehr als zwei Variablen verallgemeinern.