

## Übungen zur Analysis 3

Wintersemester 2009/2010  
Prof. Dr. R. Burkard  
Dr. M. Widmer

### Blatt 9

Wie in der Vorlesung bezeichne  $U$  stets eine offene nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $G$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}$ .

- (1) Bestimme alle Nullstellen von  $e^z$ ,  $\sin z$  und  $\cos z$ .
- (2) Seien  $H_N$  und  $F_N$  definiert durch

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} := H_N + F_N.$$

- a) Zeige, dass für alle positiven ganzen Zahlen  $N$  gilt

$$N!H_N \in \mathbb{Z},$$
$$0 < N!F_N < \frac{1}{N}.$$

- b) Schliesse aus a), dass  $e$  irrational ist.

- (3) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  wobei
  - a)  $a_n = i^n/n$
  - b)  $a_n = n^{2009}\alpha^n$  mit  $\alpha \neq 0$
  - c)  $a_n = e^n/n!$
  - d)  $a_n = n^n/n!$
- (4) Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Finde alle möglichen  $f$  unter der Voraussetzung, dass
  - a)  $u(x, y) = x^2 - y^2$ ,
  - b)  $u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ ,
  - c)  $u(x, y) = x^2 + y^2$ .
- (5) Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $f'(z) = 0$  auf ganz  $U$ . Zeige, dass  $f$  konstant ist.
- (6) Sei  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig differenzierbar mit  $f = F'$ . Zeige, dass gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

- (7) Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  ein Weg. Zeige, dass es einen stückweise linearen Weg  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(0)$  und  $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(1)$  gibt (also gibt es insbesondere einen Integrationsweg in  $U$ , der  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$  verbindet).

(8) Sei  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Hat  $f$  eine Stammfunktion auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ? (Hinweis: Korollar 3.7)

(9) Beweise Korollar 3.9 aus der Vorlesung:

Sei  $G$  ein konvexes Gebiet in  $\mathbb{C}$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Gilt für alle  $z_0, z_1, z_2 \in G$

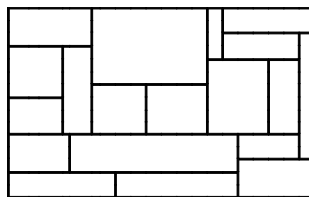
$$\int_{[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup [z_2, z_0]} f(z) dz = 0,$$

dann hat  $f$  eine Stammfunktion auf  $G$ .

(Hinweis: Beweis von Satz 3.8)

(10) Sei  $R$  eine Backsteinmauer<sup>1</sup> bestehend aus Backsteinen unterschiedlicher Kantenlängen.

Man weiss, dass mindestens eine Kantenlänge jedes Backsteins  $R_n$  eine (positive) ganze Zahl ist. Zeige, dass das auch für die ganze Mauer  $R$  gilt. (Hinweis: Integriere eine passende Funktion über das Rechteck und nutze  $\int_R \dots = \sum_n \int_{R_n} \dots$ )




---

<sup>1</sup>Vielen Dank an Martin Jancevskis für die schöne Backsteinmauer!