Übungen zur Analysis 3

Wintersemester 2009/2010
Prof. Dr. R. Burkard
Dr. M. Widmer

Extrablatt

Wie immer bezeichne U eine nichtleere offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

(1) Für eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ schreiben wir $D_f = \{z \in \mathbb{C}; f \text{ ist differenzierbar in } z\}$. Finde eine solche Funktion f mit:
a) $D_f = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; x = 2y\}$ b) $D_f = \{0\}$

(2) Berechne $\int_\gamma f(z)dz$ für:
a) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$ und $f(z) = z^7 + \cos z$
b) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ und $f(z) = 1/(z^2 - 2i)$
c) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ und $f(z) = (z^2 + 1)/(\sin z)$
d) $\gamma(t) = -i + 2ti$, $0 \le t \le 1$ und $f(z) = (z - \overline{z})/(2i)$

(3) Berechne die folgenden Integrale:
a) $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+x^2+4}dx$ b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{x}+7}{x^2+1}dx$

(4) Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$. Zeige: f ist lokal biholomorph bei z_0 genau dann, wenn $f'(z_0) \neq 0$.

(5) Löse die folgenden Anfangswertprobleme:

$$a)\ \ y' = y^2 \cos x,\ \ y(0) = 1$$
$$b)\ \ y' = y + x + 2010,\ \ y(0) = 0$$

(6) a) Bestimme die orthogonale Trajektorie der Kurvenschar $9(x+1)^2+4y^2-36C^2 = 0$.
b) Bestimme die Einhüllende der Geradenschar $y - Cx - 3C^2 = 0$.

(7) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''-4y'+y-e^x \sin x = 0$.