

Übungen zur Analysis 3

Wintersemester 2009/2010
Prof. Dr. R. Burkard
Dr. M. Widmer

Blatt 1

- (1) Sei $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $a > 0$, so dass die Bedingung

$$y(x) = \frac{1}{2}y(x+a)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Beweise oder widerlege: Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit y löst die Differentialgleichung $y' = C \cdot y$.

- (2) Löse die folgenden Differentialgleichungen.

a) $y' = y + x^2$, b) $y' = y^2 + 1$, c) $2y^2y' = x \cos x + \sin x$.

- (3) Löse die folgenden Differentialgleichungen.

a) $xy' = y(2 - x)$, b) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ (Hinweis: $u = y/x$).

- (4) Betrachte die Differentialgleichungen $y' = x^2 + y^2$.

a) Zeichne das Richtungsfeld. b) Bestimme die Isoklinen. c) Zeichne die Lösungskurven für das Anfangswertproblem mit $y(0) = 0$ resp. $y(0) = 1$.

- (5) Löse die folgenden Anfangswertprobleme auf $x \geq 0$.

a) $y' + y \sin x = 0$, $y(0) = 1$, b) $y' + y \sin x = \sin x \cos x$, $y(0) = 0$.

- (6) Löse das folgende Anfangswertproblem für die Bernoulli-Gleichung

$$(1+x)y' + y = -(1+x)^2y^4, \quad y(0) = 1; \quad \text{auf } x \geq 0.$$

- (7) Betrachte die folgende Riccati-Gleichung

$$y' = -y^2 + 2/x^2.$$

a) Rate eine Lösung.

b) Nutze a) um das AWP: $y(1) = 5$ auf $x \geq 1$ zu lösen.

- (8) Löse die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y' = \left(\frac{x+1}{y-1}\right)^2 + \frac{y-1}{x+1}$, $y(0) = 3$; auf $x \geq 0$.

b) $y' = e^{-(x+y+1)} - 1$, $y(0) = 0$; auf $x \geq 0$.