CHAPITRE I

M_n-espaces

I.1. Introduction et Définitions

Définition I.1.1. Soit $\boldsymbol{M}_n = M_n(\mathbf{C})$ l'algèbre des matrices complexes et $\{ e_{ij} \mid 1 \le i, j \le n \}$ sa base canonique. Pour un espace normé complexe X on note $M_n(X)$ l'espace vectoriel $\boldsymbol{M}_n \otimes X$ des matrices $x = [x_{ij}]_{i,j=1}^n = \sum e_{ij} \otimes x_{ij}$ avec entrées $x_{ij} \in X$ muni de l'addition et multiplication scalaire naturelle. On va considérer $M_n(X)$ aussi comme $\boldsymbol{M}_n$-bimodule avec multiplications à gauche et à droite par des matrices $\alpha = [\alpha_{ij}]$, $\beta = [\beta_{ij}] \in \boldsymbol{M}_n$

$$(\alpha \cdot x)_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_{kj}$$

$$(x \cdot \beta)_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik} \beta_{kj}$$

Une *n-norme matricielle* sur X est une norme $\| \ \|_n$ sur $M_n(X)$ avec les propriétés suivantes.

$(\mathrm{R}0)_n$ Pour toute matrice de la forme

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on a $\|x\|_n = \|x_{11}\|_X$

$(\mathrm{R}1)_n$ Pour toute paire de matrices unitaires $\upsilon, \omega \in U(n)$ et toute matrice $x \in M_n(X)$ on a

$$\|\upsilon \cdot x \cdot \omega\|_n = \|x\|_n.$$

La norme $\| \ \|_n$ sur $M_n(X)$ est dite L^∞ si elle vérifie en plus

$(\mathrm{R}2)_n$ Pour toute matrice $x \in M_n(X)$ de la forme

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

avec $x_1 \in M_k(X)$ et $x_2 \in M_{n-k}(X)$ on a

$$\|x\|_n = \max \{ \|x_1\|_k, \|x_2\|_{n-k} \};$$

ici la norme $\| \ \|_k$ est la norme induite sur $M_k(X)$ par l'inclusion naturelle $M_k(X) \ni x \mapsto \left[\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in M_n(X)$.

Remarque I.1.2. Par le théorème de Russo-Dye la condition $(\mathrm{R}1)_n$ équivaut à la condition

$(\mathrm{R}1)'_n$ $$\|\alpha \cdot x \cdot \beta\|_n \le \|\alpha\|_{\boldsymbol{M}_n} \|x\|_n \|\beta\|_{\boldsymbol{M}_n}.$$

pour toutes $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n$ et tout $x \in M_n(X)$.

Les morphismes naturels dans cette catégorie sont les applications n-bornées de la définition suivante.

Définition I.1.3. Soient $(X, \| \ \|_{X,n})$, $(Y, \| \ \|_{Y,n})$ des espaces n-normés et soit $u : X \to Y$ une application linéaire continue. Alors on note u_n l'application

$$\begin{aligned} u_n : M_n(X) &\to M_n(Y) \\ [x_{ij}] &\mapsto [u(x_{ij})] \end{aligned}$$

et $B_n(X,Y)$ l'espace $B(X,Y)$ muni de la norme $\|u\|_n = \|u_n\|$. Les notions de n-contraction et n-isométrie s'appliquent aux applications linéaires φ pour lesquelles φ_n est contractante ou isométrique respectivement. On note

$$d_n(X,Y) = \inf \{ \|u\|_n \|u^{-1}\|_n \mid u : X \to Y \text{ isomorphisme} \} \tag{I.1.1}$$

la n-distance de Banach-Mazur entre X et Y. On sera conduit à identifier deux espaces n-normés $(X, \| \, \|_{X,n})$ et $(Y, \| \, \|_{Y,n})$ s'il existe un isomorphisme linéaire n-isométrique entre X et Y, i.e. si $d_n(X,Y) = 1$.
En particulier, si l'on prend $Y = \boldsymbol{M}_n$, on obtient une n-norme L^∞ naturelle sur X^* en identifiant $M_n(X^*)$ avec $B_n(X, \boldsymbol{M}_n)$ isométriquement, i.e. pour $f = [f_{ij}] \in M_n(X^*)$ on pose

$$\|f\|_n^* = \sup \left\{ \left\| [f_{ij}(x_{kl})]_{ik,jl} \right\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \,\middle|\, \left\| [x_{kl}] \right\|_n \leq 1 \right\} \tag{I.1.2}$$

et on appelle $(X^*, \| \, \|_n^*)$ l'espace n-normé dual de $(X, \| \, \|_n)$. Ici et dans la suite le produit tensoriel $\boldsymbol{M}_m \otimes \boldsymbol{M}_n$ est le produit tensoriel minimal obtenu en identifiant $[\alpha_{ij}] \otimes [\beta_{kl}]$ avec la matrice $[\alpha_{ij}\beta_{kl}]_{ik,jl} \in \boldsymbol{M}_{mn}$. Pour $f \in M_m(X^*)$, $x \in M_n(X)$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{M}_m$ et $\gamma, \delta \in \boldsymbol{M}_n$ on va noter $\langle f, x \rangle = [\langle f_{ij}, x_{kl} \rangle] \in \boldsymbol{M}_m \otimes \boldsymbol{M}_n$ de sorte que

$$\langle \alpha \cdot f \cdot \beta, \gamma \cdot x \cdot \delta \rangle = \alpha \otimes \gamma \, \langle f, x \rangle \, \beta \otimes \delta.$$

Remarque I.1.4. Une application linéaire $\Phi : M_n(X) \to M_n(Y)$ peut être représentée sous la forme φ_n pour un certain $\varphi : X \to Y$ si et seulement si elle respecte la structure de $\boldsymbol{M}_n$-bimodule de $M_n(X)$ et $M_n(Y)$, i.e. si et seulement si $\Phi(\alpha \cdot x \cdot \beta) = \alpha \cdot \Phi(x) \cdot \beta$ pour $\alpha, \beta \in \boldsymbol{M}_n$ et $x \in M_n(X)$.

Remarque I.1.5. Rappelons également la formule suivante de la n-norme duale pour les espaces de dimension finie. Soit $(X, \| \, \|_n)$ un espace n-normé de dimension finie avec base $\{ e_1, e_2, \ldots, e_N \}$ et soit $\{ e_1^*, e_2^*, \ldots, e_N^* \}$ une base biorthonormale de X^*. Alors on a pour toute suite $\alpha_i \in \boldsymbol{M}_n$ la formule

(I.1.3)
$$\left\| \sum \alpha_i \otimes e_i^* \right\|_{M_n(X^*)} = \sup \left\{ \left\| \sum \alpha_i \otimes \beta_i \right\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \,\middle|\, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n, \left\| \sum \beta_i \otimes e_i \right\|_{M_n(X)} \leq 1 \right\}.$$

Définition I.1.6. 1. Un *espace matriciellement normé* est un espace vectoriel X dont tous les espaces matricielles $M_n(X)$ sont munis de normes $\| \, \|_n$ compatibles dans le sens que les conditions $(\mathrm{R0})_n$, et $(\mathrm{R1})_n$ sont vérifiées pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2. Soit $B(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Hilbert H. Un *espace d'opérateurs* est un sous-espace linéaire X de $B(H)$. Un tel espace est muni de n-normes naturelles en identifiant $M_n(X)$ avec un sous-espace de $M_n(B(H)) = B(\ell_2^n(H))$.

3. Une application linéaire $T : X \to Y$ entre deux espaces matriciellement normés X et Y est dite *complètement bornée (c.b.)* si les normes $\|T_n : M_n(X) \to M_n(Y)\|$ sont uniformément bornées et on pose $\|T\|_{cb} = \sup_n \|T\|_n$. On note $cb(X,Y)$ l'espace de Banach des applications complètement bornées muni de la norme $\| \, \|_{cb}$. On note

$$d_{cb}(X,Y) = \inf \{ \|u\|_{cb} \|u^{-1}\|_{cb} \mid u : X \to Y \text{ isomorphisme} \} = \sup_n d_n(X,Y)$$

la distance c.b. entre X et Y.

Une caractérisation des normes matricielles d'opérateurs est donnée par le

Théorème de Ruan (**[54]**,**[22]**)**.** Un espace matriciellement normé $(X, \{\| \|_n\})$ peut être plongé dans $B(H)$ complètement isométriquement si et seulement si les normes $\| \|_n$ vérifient $(\mathrm{R2})_n$ pour tout n.

Ce théorème a donné naissance à une théorie d'espaces de Banach «quantiques», voir **[20]**, **[21]**, **[6]**, **[5]** et les livres **[47]**, **[19]** ; on peut en particulier munir le dual d'un espace d'opérateur avec une structure d'espace d'opérateurs canonique.

Définition I.1.7. Soit X un espace d'opérateurs. On définit la structure d'espace d'opérateurs *duale standard* sur X^* en posant $M_n(X^*) = cb(X, \boldsymbol{M}_n)$.

Remarque I.1.8. Un résultat de R. R. Smith (cf. [**56**, Theorem 2.10]) dit que l'on a $cb(X, \boldsymbol{M}_n) = B_n(X, \boldsymbol{M}_n)$ isométriquement et ceci implique que pour un espace d'opérateurs X la norme sur $M_n(X^*)$ ne dépend que de la norme sur $M_n(X)$. En particulier, la définition du dual d'un espace n-normé est compatible avec la définition du dual d'un espace d'opérateurs.

Toute structure d'espace d'opérateurs sur X induit naturellement une n-norme L^∞ sur X et la question se pose si toute n-norme L^∞ sur X s'étend à une structure d'espace d'opérateurs sur X.
On vérifie facilement que la condition suivante est nécessaire.

$$\text{(R)} \qquad \left\|\sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i\right\|_n \leq \max \|x_i\|_n \left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|_{\boldsymbol{M}_n}^{1/2} \left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\|_{\boldsymbol{M}_n}^{1/2}$$

pour toutes suites $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n$ et $x_i \in M_n(X)$.
D'autre part, on vérifie que (R) implique $(\mathrm{R1})_n$ et $(\mathrm{R2})_n$. On a en fait le théorème suivant.

Théorème I.1.9. *Soit $(X, \| \|_n)$ un espace n-normé et $(X^{**}, \| \|_n^{**})$ son bidual défini par* (I.1.2)*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe une application n-isométrique $X \to B(H)$.
(ii) L'inclusion naturelle $X \to X^{**}$ est une n-isométrie.
(iii) $\| \|_n$ vérifie (R) *.*
(iv) Il existe une application n-isométrique $X \to M_n(C(K)) = C(K; \boldsymbol{M}_n)$ avec K compact.

L'équivalence de (i) et (ii) a été observé dans **[6]** ; voir aussi la proposition I.3.1 pour une construction explicite. Alors (iv) est une conséquence de (ii) si l'on prend pour K la boule unité de $M_n(X^*)$ avec la topologie $*$-faible. Il reste à montrer que (iii) implique (i). Ceci est une conséquence de la construction explicite (I.3.2b), mais on peut également déduire l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (ii) de [**22**, Theorem C], qui est valable dans notre contexte aussi, si l'on fait une petite modification dans la démonstration.

Théorème I.1.10 (**[22]**)**.** *Soit $(X, \| \|_n)$ un espace n-normé vérifiant* (R) *et soit $F \in M_n(X)^*$ avec $\|F\| \leq 1$. Alors il existe une application $\Phi : X \to \boldsymbol{M}_n$ n-contractante et des matrices contractantes $\gamma, \delta \in \boldsymbol{M}_{n^2,1}$ telles que pour tout $x \in M_n(x)$*

$$F(x) = \gamma^* \Phi_n(x) \delta$$

Lemme I.1.11. *Soit $\| \|_n$ une norme sur $M_n(X)$ vérifiant la condition* (R) *et soit $F \in M_n(X)^*$ avec $\|F\| \leq 1$. Alors il existe des états φ_F, ψ_F sur $\boldsymbol{M}_n$ tels que pour toute suite finie $(x_k)_{k=1}^p$ d'éléments de $M_n(X)$ et pour $\alpha_k, \beta_k \in \boldsymbol{M}_n$ on a*

$$\text{(I.1.4)} \qquad \left|F\left(\sum \alpha_k \cdot x_k \cdot \beta_k\right)\right| \leq \max \|(x_k)\|_n \, \varphi_F\left(\sum \alpha_k\alpha_k^*\right)^{1/2} \psi_F\left(\sum \beta_k^*\beta_k\right)^{1/2}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de trouver φ_F, ψ_F tels que pour toute $x \in M_n(X)$ et toute $\alpha, \beta \in \boldsymbol{M}_n$ on a

$$\mathfrak{Re} F(\alpha \cdot x \cdot \beta) \leq \frac{1}{2}\big(\varphi_F(\alpha\alpha^*) + \psi_F(\beta^*\beta)\big); \tag{I.1.5}$$

le cas général (I.1.4) se réduit à (I.1.5) en choisissant $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $e^{i\theta}F(\sum \alpha_k \cdot x_k \cdot \beta_k) = |F(\alpha_k \cdot x_k \cdot \beta_k)|$ et puis en minimisant la borne

$$\left|F\left(\sum t^{1/2}\alpha_k \cdot x_k \cdot t^{-1/2}\beta_k\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left(t\,\varphi_F\left(\sum \alpha_k\alpha_k^*\right) + t^{-1}\psi_F\left(\sum \beta_k^*\beta_k\right)\right).$$

Notons S_n l'espace des états sur $\boldsymbol{M}_n$ et $C_{\mathbf{R}}(S_n \times S_n)$ l'espace des fonctions continues réelles sur $S_n \times S_n$. Posons $\mathcal{E}_F \subseteq C_{\mathbf{R}}(S_n \times S_n)$ le cône convexe des sommes de fonctions de la forme

$$e_{\alpha,x,\beta}(\varphi, \psi) = \varphi(\alpha\alpha^*) + \psi(\beta^*\beta) - 2\,\mathfrak{Re} F(\alpha \cdot x \cdot \beta)$$

avec $\alpha, \beta \in \boldsymbol{M}_n$ et $\|x\| \leq 1$. Une fonction $e = \sum e_i \in \mathcal{E}_F$, où $e_i = e_{\alpha_i, x_i, \beta_i}$, ne peut pas être strictement négative. En effet, on peut choisir des états φ_0 et ψ_0 sur $\boldsymbol{M}_n$ tels que $\varphi_0(\sum \alpha_i\alpha_i^*) = \|\sum \alpha_i\alpha_i^*\|$ et $\psi_0(\sum \beta_i^*\beta_i) = \|\sum \beta_i^*\beta_i\|$, respectivement. Alors la valeur de e évalué en ce point satisfait

$$\begin{aligned}
e(\varphi_0, \psi_0) &= \varphi_0\left(\sum \alpha_i\alpha_i^*\right) + \psi_0\left(\sum \beta_i^*\beta_i\right) - 2\,\mathfrak{Re} F\left(\sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i\right) \\
&\geq \left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\| + \left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\| - 2\left|F\left(\sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i\right)\right| \\
&\geq 2\left(\left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|^{1/2}\left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\|^{1/2} - \left|F\left(\sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i\right)\right|\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

à cause de (R). Notons $\mathcal{K}^-$ le cône convexe des fonctions strictement négatives sur $S_n \times S_n$. Son intérieur est non-vide et l'intersection $\mathcal{E}_F \cap \mathcal{K}^- = \emptyset$. Le théorème de Hahn-Banach fournit une mesure μ_F sur $S_n \times S_n$ qui vérifie $\mu_F|_{\mathcal{K}^-} \leq 0$ et $\mu_F|_{\mathcal{E}_F} \geq 0$. L'inégalité pour $\mu_F|_{\mathcal{K}^-}$ implique que μ_F est une mesure positive et on peut supposer que μ_F est une probabilité. On définit maintenant les états

$$\varphi_F(\alpha) = \iint \varphi(\alpha)\, d\mu_F(\varphi, \psi)$$

et

$$\psi_F(\beta) = \iint \psi(\beta)\, d\mu_F(\varphi, \psi)$$

respectivement. Alors l'inégalité pour $\mu_F|_{\mathcal{E}_F}$ implique

$$\varphi_F\left(\sum \alpha_i\alpha_i^*\right) + \psi_F\left(\sum \beta_i^*\beta_i\right) - 2\,\mathfrak{Re} F\left(\sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i\right) = \iint \left(\sum e_i\right)(\varphi, \psi)\, d\mu_F(\varphi, \psi) \geq 0$$

□

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I.1.10. Fixons une contraction $F \in M_n(X)^*$. Le lemme I.1.11 fournit des états φ_F et ψ_F tels que F vérifie l'inégalité (I.1.4). Par la construction de Gel'fand-Naimark-Segal on peut réaliser ces états avec deux matrices de densité $\xi_F, \eta_F \in \boldsymbol{M}_n$ de sorte que $\|\xi_F\|_{HS} = \|\eta_F\|_{HS} = 1$ et

$$\begin{aligned}
\varphi_F(\alpha) &= \mathrm{tr}_n(\xi_F\alpha\xi_F^*) \\
\psi_F(\beta) &= \mathrm{tr}_n(\eta_F\beta\eta_F^*)
\end{aligned}$$

pour toute $\alpha, \beta \in \boldsymbol{M}_n$. Posons

$$K_F = [\xi_F \boldsymbol{M}_{n,1}] = \{\, \xi_F \alpha \mid \alpha \in \boldsymbol{M}_{n,1} \,\} \subseteq \boldsymbol{M}_{n,1}$$
$$L_F = [\eta_F \boldsymbol{M}_{n,1}] = \{\, \eta_F \beta^* \mid \beta \in \boldsymbol{M}_{1,n} \,\} \subseteq \boldsymbol{M}_{n,1}$$

et pour chaque $x \in X$ définissons une forme sesquilinéaire sur $K_F \times L_F$ en posant

$$\langle \xi_F \alpha, \eta_F \beta^* \rangle_x = F(\alpha \cdot x \cdot \beta); \tag{I.1.6}$$

alors en identifiant $B(\boldsymbol{M}_{n,1})$ avec $\boldsymbol{M}_n$ on trouve une matrice $\rho(x)^t \in \boldsymbol{M}_n$ telle que

$$\rho(x)^t = P_{L_F} \rho(x)^t P_{K_F} \tag{I.1.7}$$

et

$$\langle \xi_F \alpha, \eta_F \beta^* \rangle_x = \beta \eta_F^* \rho(x)^t \xi_F \alpha = \alpha^t \xi_F^t \rho(x) \eta_F^{*t} \beta^t.$$

En posant $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ on a donc pour $x = [x_{ij}] \in M_n(X)$ la formule suivante

$$F(x) = \sum_{ij} F(e_i \cdot x_{ij} \cdot e_j^*) = \sum_{ij} e_i^t \xi_F^t \rho(x_{ij}) \eta_F^{*t} e_j^{*t} = \gamma^* \rho_n(x) \delta$$

où $\gamma = (\xi_F^{t*} e_i)_{i=1}^n \in M_{1,n}(\boldsymbol{M}_{1,n}) \cong \mathbf{C}^{n^2}$ vérifie

$$\gamma^* \gamma = \sum_i e_i^t \xi_F^t \xi_F^{t*} e_i = \sum_i \operatorname{tr}_n(\xi_F^{t*} e_i e_i^t \xi_F^t) = \operatorname{tr}_n(\xi_F^{t*} \xi_F^t) = 1$$

et $\delta = (\eta_F^{t*} e_j)_{j=1}^n$ a une propriété analogue. Enfin l'application $\rho : X \to \boldsymbol{M}_n$ est évidemment linéaire et il reste a montrer qu'elle est n-contractante. Fixons $x = [x_{ij}] \in M_n(X)$. Alors

$$\begin{aligned}
\|\rho_n(x)\| &= \sup \{\, \omega^* \rho_n(x) \zeta \mid \omega, \zeta \in M_{n,1}(\boldsymbol{M}_{n,1}), \omega^* \omega \le 1, \zeta^* \zeta \le 1 \,\} \\
&= \sup \Big\{ \sum_{i,j} \omega_i^* \rho(x_{ij}) \zeta_j \,\Big|\, \sum_i \omega_i^* \omega_i \le 1, \sum_j \zeta_j^* \zeta_j \le 1 \Big\} \\
&= \sup \Big\{ \sum_{i,j} \zeta_j^t \rho(x_{ij})^t \omega_i^{t*} \,\Big|\, \sum_i \omega_i^* \omega_i \le 1, \sum_j \zeta_j^* \zeta_j \le 1 \Big\}.
\end{aligned}$$

Maintenant (I.1.7) implique que l'on peut restreindre ce supremum aux vecteurs ω et ζ pour lesquels il existe $\alpha_i \in \boldsymbol{M}_{n,1}$ et $\beta_j \in \boldsymbol{M}_{1,n}$ tels que

$$\omega_i^{*t} = \xi_F \alpha_i \qquad \text{et} \qquad \zeta_i^{*t} = \xi_F \beta_i^*$$

avec

$$\begin{aligned}
\varphi_F\Big(\sum_i \alpha_i \alpha_i^*\Big) &= \sum_i \operatorname{tr}_n(\xi_F \alpha_i \alpha_i^* \xi_F^*) = \sum_i \alpha_i^* \xi_F^* \xi_F \alpha_i \\
&= \sum_i \alpha_i^t \xi_F^t \xi_F^{*t} \alpha_i^{*t} = \sum_i \omega_i^* \omega_i \\
&\le 1
\end{aligned}$$

et par un calcul analogue

$$\psi_F\Big(\sum_j \beta_j^* \beta_j\Big) \le 1.$$

On a donc

$$\|\rho_n(x)\| = \sup \Big\{ \sum_{ij} \beta_j \eta_F^* \rho(x_{ij})^t \xi_F \alpha_i \,\Big|\, \varphi_F\Big(\sum \alpha_i \alpha_i^*\Big) \le 1, \psi_F\Big(\sum \beta_j^* \beta_j\Big) \le 1 \,\Big\}$$

et par (I.1.4) on peut estimer

$$\begin{aligned}\sum_{ij} \beta_j \eta_F^* \rho(x_{ij})^t \xi_F \alpha_i &= F\Big(\sum \alpha_i \cdot x_{ij} \cdot \beta_j\Big) \\ &= F\Big(\Big(\sum \alpha_i e_i^*\Big) \cdot x \cdot \Big(\sum e_j \beta_j\Big)\Big) \\ &\leq \varphi_F\Big(\sum \alpha_i \alpha_i^*\Big)^{1/2} \|x\|_n \, \psi_F\Big(\sum \beta_j^* \beta_j\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

□

Définition I.1.12. On appelle M_n*-espace* tout espace n-normé $(X, \| \, \|_n)$ qui vérifie les conditions équivalentes du théorème I.1.9. On dira qu'une structure d'espace d'opérateurs $\{\| \, \|'_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ sur X est *compatible* avec $\| \, \|_n$ si $\| \, \|'_n = \| \, \|_n$.

Remarque I.1.13. 1. En particulier, tout M_n-espace $(X, \| \, \|_n)$ a une réalisation n-isométrique comme sous-espace de $C(\Omega, \boldsymbol{M}_n)$, où Ω est la boule unité de $M_n(X^*)$.

2. Soit $\| \, \|_n$ une norme sur $M_n(X)$ qui admet une formule

$$\|x\|_n = \sup \left\{ \|\Phi_n(x)\|_{M_n(Y)} \mid \Phi \in S \right\}$$

où $S \subseteq B(X, Y)$ et Y est un M_n-espace. Alors $(X, \| \, \|_n)$ vérifie (R) aussi. En particulier, tout dual d'un espace n-normé vérifie (R).

Proposition I.1.14. *Soit* $(X, \| \, \|_n)$ *un espace n-normé,* $(Y, \| \, \|_n)$ *un* M_n*-espace et soient* $(X^*, \| \, \|_n^*)$ *et* $(Y^*, \| \, \|_n^*)$ *leurs duaux. Alors pour toute application n-bornée* $u : X \to Y$ *on a* $\|u\|_n = \|u^*\|_n$.

Démonstration. En effet, le théorème I.1.9 (ii) permet d'écrire

$$\begin{aligned}\|u\|_n = \sup \Big\{ &\big\|[\langle g_{ij}, u(x_{kl})\rangle]\big\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \mid \\ &[g_{ij}] \in M_n(Y^*), \big\|[g_{ij}]\big\|_n^* \leq 1;\ [x_{kl}] \in M_n(X), \big\|[x_{kl}]\big\|_n \leq 1 \Big\}\end{aligned}$$

et ceci implique l'assertion. □

Remarque I.1.15. Pour un opérateur de rang fini $u : X \to Y$, $u(x) = \sum \langle f_i, x \rangle \, y_i$ avec $f_i \in X^*$ et $y_i \in Y$ on a les formules suivantes pour la norme.

$$\begin{aligned}\|u\|_n &= \sup \left\{ \Big\| \sum \langle f_i, x \rangle \otimes y_i \Big\|_{M_n(Y)} \,\Big|\, x \in M_n(X), \|x\|_n \leq 1 \right\} \\ &= \sup \Big\{ \Big\| \sum \langle f_i, x \rangle \otimes \langle g, y_i \rangle \Big\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \,\Big| \\ &\qquad\qquad x \in M_n(X), \|x\|_n \leq 1, g \in M_n(Y^*), \|g\|_n^* \leq 1 \Big\} \\ &= \sup \left\{ \Big\| \sum f_i \otimes \langle g, y_i \rangle \Big\|_{M_n(X^*)} \,\Big|\, g \in M_n(Y^*), \|g\|_n^* \leq 1 \right\}\end{aligned}$$

On a également une version du théorème de Wittstock pour les M_n-espaces.

Proposition I.1.16. *Soient* $(X, \| \, \|_{n,X}) \subseteq (X', \| \, \|_{n,X'})$ *des* M_n*-espaces et soit* $u : X \to \boldsymbol{M}_n$ *une application n-bornée. Alors il existe une extension* $\hat{u} : X' \to \boldsymbol{M}_n$ *telle que* $\hat{u}|_X = u$ *et* $\|\hat{u}\|_n = \|u\|_n$.

Démonstration. Ceci est une conséquence du théorème de Wittstock (cf. [**49**, Theorem 3.6]) et du résultat de R. Smith déjà mentionné ci-dessus [**56**, Theorem 2.10]. □

I.2. Constructions de base

Outre le dual, on peut obtenir de nouveaux M_n-espaces par les opérations suivantes.

I.2.1. Quotients. Soit $(X, \|\ \|_n)$ un M_n-espace et soit Y un sous-espace fermé. On définit

$$M_n(X/Y) = M_n(X)/M_n(Y)$$

et un calcul élémentaire montre que la condition (R) est satisfaite ainsi que les identités n-isométriques

$$\begin{aligned} Y^* &= X^*/Y^\perp \\ (X/Y)^* &= Y^\perp \end{aligned}$$

Si X et Y sont des espaces d'opérateurs, on obtient l'espace d'opérateurs quotient X/Y avec la structure matricielle $\{\, M_n(X/Y) \mid n \in \mathbf{N} \,\}$.

I.2.2. Sommes directes. Soit $(X_i, \|\ \|_{n,i})_{i\in I}$ une famille de M_n-espaces. Alors on note $\bigoplus X_i = \bigoplus_\infty X_i = \ell_\infty(X_i)$ l'espace des suites uniformément bornées $(x_i) \in \prod X_i$ avec la M_n-structure

$$\|(x_i)\|_{M_n(\oplus X_i)} = \sup\ \|x_i\|_{n,i}.$$

La construction duale est la ℓ_1-somme directe. A priori il y a deux possibilités de généraliser la somme directe d'espaces d'opérateurs décrite dans [**47**]. Pour deux M_n-espaces X_0 et X_1 posons

$$\begin{aligned} P_\infty &= \{\, u = (u_0, u_1) \mid u_i : X_i \to B(H_u)\ n\text{-contractantes} \,\} \\ P_n &= \{\, u = (u_0, u_1) \mid u_i : X_i \to \boldsymbol{M}_n\ n\text{-contractantes} \,\}; \end{aligned}$$

alors les n-normes correspondantes sur $X_0 \oplus X_1$

$$\begin{aligned} \|x_0 \oplus x_1\|_{1,(\infty)} &= \sup_{u\in P_\infty} \|u_{0n}(x_0) + u_{1n}(x_1)\|_{M_n(B(H_u))} \\ \|x_0 \oplus x_1\|_{1,n} &= \sup_{u\in P_n} \|u_{0n}(x_0) + u_{1n}(x_1)\|_{\boldsymbol{M}_n\otimes\boldsymbol{M}_n} \end{aligned}$$

vérifient (R) et en fait elles sont égales : la remarque I.1.13 (1.) fournit un plongement n-isométrique $\rho : X_0 \oplus_{1,(\infty)} X_1 \to C(K; \boldsymbol{M}_n)$, d'où des n-contractions $\rho_i = \rho|_{X_i} : X_i \to C(K; \boldsymbol{M}_n)$ et ceci implique que

$$\begin{aligned} \|x_0 \oplus x_1\|_{1,(\infty)} &= \sup_{t\in K} \|\rho_{0n}(x_0)(t) + \rho_{1n}(x_1)(t)\|_{\boldsymbol{M}_n\otimes\boldsymbol{M}_n} \\ &\le \|x_0 \oplus x_1\|_{1,n}. \end{aligned}$$

On va donc noter $X_0 \oplus_1 X_1$ le M_n-espace $(X_0 \oplus X_1, \|\ \|_{1,n})$. Il est caractérisée par la propriété universelle suivante : Pour tout M_n-espace Y et pour toutes n-contractions $u_i : X_i \to Y$ l'application

$$\begin{aligned} X_0 \oplus_1 X_1 &\to Y \\ (x_0, x_1) &\mapsto u_0(x_0) + u_1(x_1) \end{aligned}$$

est n-contractante aussi. En particulier on peut identifier n-isométriquement

$$(X_0 \oplus_\infty X_1)^* = X_0^* \oplus_1 X_1^* \tag{I.2.1}$$

$$(X_0 \oplus_1 X_1)^* = X_0^* \oplus_\infty X_1^* \tag{I.2.2}$$

pour la dualité

$$\begin{aligned}(X_0^* \oplus X_1^*) \times (X_0 \oplus X_1) &\to \mathbf{C} \\ \langle f \oplus g, x \oplus y\rangle &= \langle f, x\rangle + \langle g, y\rangle.\end{aligned}$$

I.2.3. Interpolation complexe. Rappelons la définition de la méthode d'interpolation complexe. Un couple (X_0, X_1) de M_n-espaces est dit compatible s'il existe un espace vectoriel complexe topologique V avec des inclusions continues $X_0, X_1 \subseteq V$, permettant ainsi de définir les espaces $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1$; en munissant ces derniers avec les normes

$$\|x\|_{M_n(X_0\cap X_1)} = \max\{\, \|x\|_{M_n(X_0)}, \|x\|_{M_n(X_1)} \,\}$$

pour $x \in M_n(X_0 \cap X_1)$ et

$$\begin{aligned}\|x\|_{M_n(X_0+X_1)} = \inf\{\, \|x_0\|_{M_n(X_0)} + \|x_1\|_{M_n(X_1)} \mid \\ x = x_0 + x_1, x_0 \in M_n(X_0), x_1 \in M_n(X_1) \,\}\end{aligned}$$

pour $x \in M_n(X_0 + X_1)$ respectivement, on obtient des M_n-espaces correspondants à l'inclusion «diagonale» $X_0 \cap X_1 \subseteq X_0 \oplus_\infty X_1$ et au quotient $X_0 + X_1 = X_0 \oplus_1 X_1/\{\, (x, -x) \mid x \in X_0 \cap X_1 \,\}$. On observe que ces constructions vérifient

$$\begin{aligned}(X_0 \cap X_1)^* &= X_0^* + X_1^* \\ (X_0 + X_1)^* &= X_0^* \cap X_1^*.\end{aligned}$$

On peut donc supposer que V est un M_n-espace lui aussi.
Soit maintenant

$$\Delta = \{\, x + iy \mid 0 < x < 1, y \in \mathbf{R} \,\}$$

l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\Delta_0 = i\,\mathbf{R}$ et $\Delta_1 = 1 + i\,\mathbf{R}$. Posons

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0(X_0, X_1) = \Big\{\, f : \overline{\Delta} \to X_0 + X_1 \;\Big|\; f = \sum f_k x_k, x_k \in X_0 \cap X_1, \\ f_k : \overline{\Delta} \to \mathbf{C} \text{ continue, analytique sur } \Delta \text{ et tendant vers } 0 \text{ à l'infini} \Big\}\end{aligned}$$

et notons $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ son complété pour la norme

$$\|f\|_{\mathcal{F}} = \max\{\, \sup_{t\in\mathbf{R}} \|f(it)\|_{X_0}, \sup_{t\in\mathbf{R}} \|f(1 + it)\|_{X_1} \,\}.$$

Cet espace a une M_n-structure évidente naturelle induite par les M_n-structures de X_0 et X_1. Fixons $0 < \theta < 1$. On note $S_\theta(X_0, X_1)$ l'adhérence de

$$N_\theta(X_0, X_1) = \{\, f \in \mathcal{F}_0(X_0, X_1) \mid f(\theta) = 0 \,\}$$

et on définit

$$X_\theta = (X_0, X_1)_\theta = \mathcal{F}(X_0, X_1)/S_\theta(X_0, X_1)$$

avec la M_n-structure quotient. Dans le cas où (X_0, X_1) est un couple compatible d'espaces d'opérateurs on obtient l'espace d'opérateurs interpolé comme quotient d'espace d'opérateurs de $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ par $S_\theta(X_0, X_1)$, cf. **[50]**.

I.2.4. Ultraproduits. Soit $(X_i, \| \ \|_{n,i})_{i\in I}$ une famille de M_n-espaces et soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I. Soit

$$\mathcal{N}_{\mathcal{U}} = \{ (x_i) \in \ell_\infty(X_i) \mid \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|_{n,i} = 0 \}.$$

Alors on note $\hat{X}_{\mathcal{U}} = \prod X_i/\mathcal{U}$ l'espace $\ell_\infty(X_i)/\mathcal{N}_{\mathcal{U}}$ avec la M_n-structure quotient

$$M_n(\prod X_i/\mathcal{U}) = M_n(\ell_\infty(X_i))/M_n(\mathcal{N}_{\mathcal{U}}).$$

L'ultraproduit respecte les sous-espaces et les quotients et on a pour toute famille de sous-espaces $Y_i \subseteq X_i$ l'inclusion n-isométrique

$$\prod Y_i/\mathcal{U} \subseteq \prod X_i/\mathcal{U}$$

et l'identité n-isométrique

$$\prod X_i/\mathcal{U} \Big/ \prod Y_i/\mathcal{U} = \prod X_i/Y_i \Big/ \mathcal{U}.$$

On vérifie également que pour une suite uniformément bornée d'opérateurs $u_i : X_i \to Y_i$ on obtient $\hat{u} : \hat{X}_{\mathcal{U}} \to \hat{Y}_{\mathcal{U}}$ avec $\|\hat{u}\|_n = \lim_{\mathcal{U}} \|u_i\|_n$. En particulier on a un plongement n-isométrique

$$\prod X_i^*/\mathcal{U} \subseteq (\prod X_i/\mathcal{U})^*$$

et cette application est surjective si tous les X_i ont la même dimension finie.

I.2.5. Conjugaison complexe. Soit X un M_n-espace dont on peut, autant qu'espace vectoriel complexe, considérer l'espace conjugué complexe $\overline{X}$, qui est le même espace avec multiplication scalaire conjuguée $\lambda\overline{x} = \overline{\overline{\lambda}x}$ et que l'on peut munir de la M_n-structure conjuguée en identifiant n-anti-isométriquement

$$M_n(\overline{X}) = \overline{\boldsymbol{M}}_n \otimes X$$

i.e.

$$\Big\| \sum \alpha_i \otimes \overline{x_i} \Big\|_{\boldsymbol{M}_n(\overline{X})} = \Big\| \sum \overline{\alpha_i} \otimes x_i \Big\|_{\boldsymbol{M}_n(X)}$$

où $\overline{\alpha} = [\overline{\alpha_{ij}}]$ est la conjugaison complexe usuelle dans $\boldsymbol{M}_n$.

I.2.6. Opposé. Ici on transfère l'opération de transposition des matrices usuelles aux matrices à valeurs vectorielles, c'est-à-dire l'espace X^{op} est l'espace vectoriel X avec la n-norme

$$\big\| [x_{ij}] \big\|_{M_n(X^{op})} = \big\| [x_{ji}] \big\|_{M_n(X)}.$$

On remarque que pour vérifier la condition (R) pour les deux dernières constructions on doit utiliser la n-anti-isométrie de $\boldsymbol{M}_n$ et $\overline{\boldsymbol{M}}_n$.

I.3. MIN et MAX

Il y a plusieurs conceptions de structures MIN et MAX. On peut considérer la n-norme minimale sur un espace normé X, qui en fait est induit par la structure d'espace d'opérateurs minimale :

$$\begin{aligned} \big\| [x_{ij}] \big\|_{n,MIN} &= \sup \Big\{ \big\| [\langle f, x_{ij} \rangle] \big\|_{\boldsymbol{M}_n} \mid f \in X^*, \|f\| \leq 1 \Big\} \\ &= \sup \{ \|(\upsilon \cdot [x_{ij}] \cdot \omega)_{11}\|_X \mid \upsilon, \omega \in \boldsymbol{M}_n \text{ unitaires} \}. \end{aligned}$$

En effet, l'axiome $(\mathrm{R1})'_n$ implique, que pour toutes $v, \omega \in U(n)$ et toute $x \in M_n(X)$ on a

$$\begin{aligned}\|(v \cdot x \cdot \omega)_{11}\|_X &= \|e_{11} v \cdot x \cdot \omega e_{11}\|_n \\ &\le \|x\|_n.\end{aligned}$$

Donc la n-norme minimale vérifie automatiquement (R) et en particulier elle est L^∞.
La n-norme maximale dépend de la catégorie en considération.

$$\big\|[x_{ij}]\big\|_{n,MAX} = \sup \big\|[T(x_{ij})]\big\|_{M_n(Y)}$$

définit la plus grande n-norme, la plus grande n-norme L^∞ et la plus grande n-norme d'espace d'opérateurs, si l'on prend le supremum sur tous les applications contractantes T de X dans Y, où Y varie sur les espaces n-normés, les espaces n-normés L^∞ ou $B(H)$ (en fait, le théorème I.1.9 (iv) permet de prendre $Y = \boldsymbol{M}_n$), respectivement. En particulier, la plus grande n-norme qui vérifie (R) est la n-norme induite par la structure d'espace d'opérateurs maximale sur X.
On peut également sur un M_n-espace $(X, \|\ \|_n)$ introduire des structures d'espaces d'opérateurs MIN et MAX analogues aux structures MIN et MAX des espaces normés introduites dans [**6**] et [**40**], voir aussi [**41**, Theorem 2.1].

Proposition I.3.1. *Soit $(X, \|\ \|_n)$ un M_n-espace. Posons, pour $p \in \mathbf{N}$ et $x = [x_{kl}] \in M_p(X)$,*

$$\text{(I.3.1)}\qquad \begin{aligned}\|x\|_{MIN,p} &= \sup \Big\{ \|\langle f, x\rangle\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_p} \mid f \in M_n(X^*), \|f\|_n^* \le 1 \Big\} \\ &= \sup \big\{ \|\rho_p(x)\|_{M_p(\boldsymbol{M}_n)} \mid \rho : X \to \boldsymbol{M}_n \ n\text{-contractante} \big\}\end{aligned}$$

et

$$\text{(I.3.2a)}\qquad \|x\|_{MAX,p} = \sup \big\{ \|\rho_p(x)\|_{M_p(B(H))} \mid \rho : X \to B(H) \ n\text{-contractante} \big\}$$

$$\text{(I.3.2b)}\qquad = \inf \Big\{ \Big\|\sum \alpha_i \alpha_i^*\Big\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} \Big\|\sum \beta_i^* \beta_i\Big\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} \Big| \, x = \sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i, \quad \alpha_i \in \boldsymbol{M}_{p,n},\ \beta_i \in \boldsymbol{M}_{n,p},\ x_i \in M_n(X), \|x_i\|_n \le 1 \Big\}.$$

Alors les p-normes $\|\ \|_{MIN,p}$ et $\|\ \|_{MAX,p}$ définissent des structures d'espace d'opérateurs sur X compatibles avec $\|\ \|_n$ et de plus, toute autre structure d'espace d'opérateurs compatible $\{\|\ \|_k\}$ sur X satisfait pour $k \in \mathbf{N}$ et $x \in M_k(X)$ les inégalités

$$\text{(I.3.3)}\qquad \|x\|_{M_k(MIN(X, \|\ \|_n))} \le \|x\|_k \le \|x\|_{M_k(MAX(X, \|\ \|_n))}.$$

Démonstration. Les inclusions de X dans $B(H)$ de la formule (I.3.1) ainsi que de la formule (I.3.2a) définissent explicitement des structures d'espace d'opérateurs sur X compatibles avec la n-norme $\|\ \|_n$ comme conséquence du théorème I.1.9 (ii). Ce qui concerne (I.3.3), il est clair que la norme matricielle (I.3.2a) domine tout autre norme matricielle compatible avec $\|\ \|_n$. Le fait que la structure MIN est dominée par toute autre structure d'espaces d'opérateurs $\|\ \|_p$ est aussi clair, car pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in M_n(X)$ on a

$$\begin{aligned}\|x\|_p &= \sup \{ \|\langle f, x\rangle\|_{\boldsymbol{M}_p \otimes \boldsymbol{M}_p} \mid f \in M_p(X^*), \|f\|_p^* \le 1 \} \\ &\ge \sup \{ \|\langle f, x\rangle\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_p} \mid f \in M_n(X^*), \|f\|_n^* \le 1 \} \\ &= \|x\|_{MIN,p}.\end{aligned}$$

Il reste à montrer que (I.3.2a) et (I.3.2b) sont identiques. Pour ceci il suffit de montrer que la norme matricielle $\|\ \|'_{MAX,p}$ définie par (I.3.2b) est compatible avec $\|\ \|_n$, qu'elle vérifie les axiomes de Ruan $(\mathrm{R1})_p$ et $(\mathrm{R2})_p$, et qu'elle domine toute autre norme compatible. La condition (R) implique que $\|\ \|_n = \|\ \|'_{MAX,n}$ et la compatibilité est assurée. Il est aussi clair que les normes $\| \|'_{MAX,p}$ vérifient $(\mathrm{R}1)_p$. Soit maintenant $x = \left[\begin{smallmatrix} x' & 0 \\ 0 & x'' \end{smallmatrix}\right] \in M_p(X)$ avec $x' \in M_k(X)$ et $x'' \in M_{p-k}(X)$. Alors par invariance unitaire de la norme $\| \|'_{MAX,p}$ on a l'inégalité $\max\{ \|x'\|'_{MAX,k}, \|x''\|'_{MAX,p-k} \} \le \|x\|'_{MAX,p}$. Notons $\varepsilon_k = \left[\begin{smallmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in \boldsymbol{M}_p$ la projection sur les k premiers composants. Alors si l'on a des décompositions

$$\begin{bmatrix} x' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum \alpha'_i \cdot x'_i \cdot \beta'_i = \sum \varepsilon_k\, \alpha'_i \cdot x'_i \cdot \beta'_i\, \varepsilon_k$$

et

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x'' \end{bmatrix} = \sum \alpha''_j \cdot x''_j \cdot \beta''_j = \sum (1_p - \varepsilon_k)\, \alpha''_j \cdot x''_j \cdot \beta''_j\, (1_p - \varepsilon_k)$$

avec $\|x'_i\|_n \le 1$ et $\|x''_j\|_n \le 1$ et tels que

$$\Big\|\sum \alpha'_i \alpha'^*_i\Big\| = \Big\|\sum \beta'^*_i \beta'_i\Big\| < \|x'\|'_{MAX,k} + \varepsilon$$
$$\Big\|\sum \alpha''_j \alpha''^*_j\Big\| = \Big\|\sum \beta''^*_j \beta''_j\Big\| < \|x''\|'_{MAX,p-k} + \varepsilon,$$

alors on peut décomposer

$$x = \sum \varepsilon_k\, \alpha'_i \cdot x'_i \cdot \beta'_i\, \varepsilon_k + \sum (1_p - \varepsilon_k)\, \alpha''_j \cdot x''_j \cdot \beta''_j\, (1_p - \varepsilon_k)$$

avec

$$\begin{aligned} \Big\|\sum \varepsilon_k\, \alpha'_i \alpha'^*_i \varepsilon_k + \sum (1_p - \varepsilon_k)\, \alpha''_j \alpha''^*_j (1_p - \varepsilon_k)\Big\| &= \\ = \max \Big\{ \Big\|\sum \varepsilon_k\, \alpha'_i \alpha'^*_i \varepsilon_k\Big\|, \Big\|\sum \varepsilon_k\, \alpha''_j \alpha''^*_j \varepsilon_k\Big\| \Big\} & \\ < \max\{ \|x'\|_{MAX,k}, \|x''\|_{MAX,p-k} \} + \varepsilon & \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Big\|\sum (1_p - \varepsilon_k)\, \beta'^*_i \beta'_i\, (1_p - \varepsilon_k) + \sum (1_p - \varepsilon_k)\, \beta''^*_j \beta''_j\, (1_p - \varepsilon_k)\Big\| &= \\ = \max \Big\{ \Big\|\sum (1_p - \varepsilon_k)\, \beta'^*_i \beta'_i\, (1_p - \varepsilon_k)\Big\|, \Big\|\sum (1_p - \varepsilon_k)\, \beta''^*_j \beta''_j\, (1_p - \varepsilon_k)\Big\| \Big\} & \\ < \max\{ \|x'\|_{MAX,k}, \|x''\|_{MAX,p-k} \} + \varepsilon. & \end{aligned}$$

Enfin le fait que $\| \|'_{MAX,p}$ domine tout autre norme compatible est évident, puisque tout autre structure d'espace d'opérateurs $\| \|_p$ compatible avec $\| \|_n$ coïncide avec $\| \|'_{MAX,n}$ sur $M_n(X)$ et vérifie l'inégalité

$$\Big\|\sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i\Big\|_p \le \Big\|\sum \alpha_i \alpha^*_i\Big\|^{1/2}_{\boldsymbol{M}_p} \Big\|\sum \beta^*_i \beta_i\Big\|^{1/2}_{\boldsymbol{M}_p} \max_i \|x_i\|_n$$

comme conséquence des axiomes de Ruan. □

Définition I.3.2. On note $MIN(X, \| \|_n)$ et $MAX(X, \| \|_n)$ respectivement les espaces d'opérateurs définis par les normes matricielles (I.3.1) et (I.3.2) et on note $MIN(X) = MIN(X, \| \|_1)$ et $MAX(X) = MAX(X, \| \|_1)$ les structures de Paulsen.

Remarque I.3.3.
1. Les formules (I.3.1) et (I.3.2) définissent des structures d'espaces d'opérateurs sur X pour n'importe quelle n-norme $\| \|_n$, mais ces structures sont compatibles avec la norme $\| \|_n$ si et seulement si elle vérifie les conditions du théorème I.1.9.
2. N'importe quelle n-isométrie $\Phi : X \to C(K; \boldsymbol{M}_n)$ induit la structure d'espace opérateurs $MIN(X, \| \|_n)$ sur X.

Les structures MIN est MAX sont caractérisées par les propriétés universelles suivantes (cf. [**32**] et [**48**, Theorem 18] pour une généralisation).

Proposition I.3.4. *Soit $(X, \{\| \ \|_k\})$ un espace d'opérateurs. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Pour tout espace d'opérateurs Y, toute application bornée $u : Y \to X$ est complètement bornée avec $\|u\|_{cb} = \|u\|_n$.

(ii) Il existe un compact K tel que on a un plongement complètement isométrique $X \subseteq C(K; \boldsymbol{M}_n)$.

(iii) On a $X = MIN(X, \| \ \|_n)$ complètement isométriquement.

Démonstration. En effet, l'équivalence de (ii) et (iii) est clair par la remarque précédente ; pour montrer l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) il suffit de rappeler que $C(K; \boldsymbol{M}_n) = \boldsymbol{M}_n \check{\otimes} C(K)$ (cf. e.g. [**49**, Corollary 3.18]), ce qui permet de calculer la norme complètement bornée de n'importe quelle application linéaire $u : Y \to C(K; \boldsymbol{M}_n)$ à partir des normes de $u_t : Y \to \boldsymbol{M}_n, y \mapsto u(y)(t)$, $t \in K$, et puis d'appliquer [**56**, Theorem 2.10]

$$\|u : Y \to C(K; \boldsymbol{M}_n)\| = \sup_{t \in K} \|u_t\|_{cb} = \sup_{t \in K} \|u_t\|_n = \|u\|_n.$$

D'autre part, la condition (i) implique que

$$\|id : MIN(X, \| \ \|_n) \to X\|_{cb} = \|id : MIN(X, \| \ \|_n) \to X\|_n = 1$$

i.e. $d_{cb}(X, MIN(X, \| \ \|_n)) = 1$. □

Remarque I.3.5. Dans [**48**, Theorem 18] (voir aussi [**28**, Corollary 3.1.7.9]) il est montré que les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $\inf \{ \, d_{cb}(X, Y) \mid Y \subseteq C(K; \boldsymbol{M}_n), \ K \text{ compact} \, \} \leq C$

(ii) Pour tout espace d'opérateurs Y, toute application linéaire bornée $u : Y \to X$ est complètement bornée avec $\|u\|_{cb} \leq C\|u\|_n$.

Avec un argument analogue on montre

Proposition I.3.6. *Soit $(X, \{\| \ \|_k\})$ un espace d'opérateurs. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Pour tout espace d'opérateurs Y, toute application bornée $u : X \to Y$ est complètement bornée avec $\|u\|_{cb} = \|u\|_n$.

(ii) On a $X = MAX(X, \| \ \|_n)$ complètement isométriquement.

Proposition I.3.7. *Soit $(X, \| \ \|_n)$ un M_n-espace et soit Y un sous-espace fermé. Alors on a les propriétés suivantes.*

(i) La structure MIN est injective : Le plongement

$$MIN(Y, \| \ \|_n) \subseteq MIN(X, \| \ \|_n)$$

est complètement isométrique.

(ii) La structure MAX est projective : L'application quotient

$$q : MAX(X, \| \ \|_n) \to MAX(X/Y, \| \ \|_n)$$

est une surjection métrique complète.

DÉMONSTRATION. (i) Ceci est une conséquence du théorème de Wittstock (cf. proposition I.1.16). En effet, pour $p \in \mathbf{N}$ et $y \in M_p(Y)$

$$\begin{aligned}\|y\|_{MIN,p} &= \sup \{ \|\langle g, y\rangle\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_p} \mid g \in M_n(Y^*), \|g\|_n^* \leq 1 \} \\ &= \sup \{ \|\langle f, y\rangle\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_p} \mid f \in M_n(X^*), \|f\|_n^* \leq 1 \}\end{aligned}$$

puisque tout $g \in M_n(Y^*)$ a une extension $\tilde{g} \in M_n(X^*)$ telle que $\|\tilde{g}\|_{M_n(X^*)} \leq \|g\|_{M_n(Y^*)}$.
(ii) Soit $(X/Y, \| \|_n)$ le M_n-espace quotient de X et Y et soit q l'application quotient. Soit $\hat{x} \in M_p(X/Y)$ avec

$$\|\hat{x}\|_{M_p(MAX(X/Y,\| \|_n))} < 1,$$

alors par (I.3.2b) il existe une décomposition finie

$$\hat{x} = \sum \alpha_i \cdot \hat{x}_i \cdot \beta_i$$

avec $\hat{x}_i \in M_n(X/Y)$, $\alpha_i \in \boldsymbol{M}_{p,n}$, $\beta_i \in \boldsymbol{M}_{n,p}$ tels que $\|\hat{y}_i\|_{M_n(X/Y)} < 1$ et

$$\left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} \left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} < 1.$$

Alors on peut choisir $x_i \in M_n(X)$ tels que $q_n(x_i) = \hat{x}_i$ et $\|x_i\|_{M_n(X)} < 1$ et en posant

$$x = \sum \alpha_i \cdot x_i \cdot \beta_i$$

on a $q_n(x) = \hat{x}$ et $\|x\|_n < 1$. □

Remarque I.3.8. La structure MAX n'étant pas injective, permet pourtant grâce à la formule (I.3.2b) la formule «locale» suivante

$$\|x\|_{M_p(MAX(X,\| \|_n))} = \inf \left\{ \|x\|_{M_p(MAX(Y,\| \|_n))} \mid Y \subseteq X \text{ fini-dimensionnel t.q. } x \in M_p(Y) \right\}$$

Les structures MIN et MAX sont en dualité pour $n = 1$ (cf. [**5**, Corollary 2.8]), et la même démonstration donne le cas général.

Théorème I.3.9. *On a*

$$MIN(X^{**}, \| \|_n^{**}) = MIN(X, \| \|_n)^{**}$$

complètement isométriquement.

DÉMONSTRATION. Par définition de la structure MIN, l'application identité $Id : MIN(X, \| \|_n)^{**} \to MIN(X^{**}, \| \|_n^{**})$ est une contraction complète et il suffit de montrer que son inverse l'est aussi. L'inclusion $X \subseteq X^{**}$ induit sur $M_n(X)$ la structure d'espace d'opérateurs $MIN(X^{**}, \| \|_n^{**})$. et celle-ci doit coïncider avec $MIN(X, \| \|_n)$, puisque $Id : (X, \| \|_n) \to (X^{**}, \| \|_n^{**})$ est une n-isométrie. On a donc deux inclusions complètement isométriques $MIN(X, \| \|_n) \to MIN(X, \| \|_n)^{**}$ et $MIN(X, \| \|_n) \to MIN(X^{**}, \| \|_n^{**})$. Alors il résulte de [**5**, Theorem 2.5] que la structure d'espace d'opérateurs sur X^{**} est uniquement determinée par celle sur X. □

Corollaire I.3.10. *On a complètement isométriquement*

(I.3.4) $$MAX(X, \| \|_n)^* = MIN(X^*, \| \|_n^*)$$

(I.3.5) $$MIN(X, \| \|_n)^* = MAX(X^*, \| \|_n^*)$$

DÉMONSTRATION. Notons d'abord l'identité

(I.3.6) $$\begin{aligned}\|f\|_{MIN(X^*,\| \|_n^*),p} &= \sup \left\{ \|\langle f, x\rangle\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_p} \mid x \in M_n(X), \|x\|_n \leq 1 \right\} \\ &= \left\|[f_{ij}]\right\|_{B_n((X,\| \|_n),\boldsymbol{M}_p)}\end{aligned}$$

pour $f \in M_p(X^*)$. Ensuite les identités isométriques

$$\begin{aligned} M_p\big(MAX(X, \|\ \|_n)^*\big) &= CB(MAX(X, \|\ \|_n), \boldsymbol{M}_p) \\ &= B_n((X, \|\ \|_n), \boldsymbol{M}_p) \qquad \text{par définition de } MAX \\ &= M_p(MIN(X^*, \|\ \|_n^*)) \qquad \text{par (I.3.6)} \end{aligned}$$

impliquent (I.3.4). D'autre part, les identités complètement isométriques

$$\begin{aligned} MAX(X^*, \|\ \|_n^*)^* &= MIN(X^{**}, \|\ \|_n^{**}) \qquad \text{par (I.3.4)} \\ &= MIN(X, \|\ \|_n)^{**} \qquad \text{par (I.3.9)} \end{aligned}$$

montrent que les espaces d'opérateurs duaux de $MIN(X, \|\ \|_n)^*$ et $MAX(X^*, \|\ \|_n^*)$ sont isomorphes complètement isométriquement et ceci implique (I.3.5). □

Plus tard on aura besoin du paramètre suivant (cf. [**40**]).

Définition I.3.11. Soit $(X, \|\ \|_n)$ un M_n-espace. On notera

$$\begin{aligned} \alpha(X, \|\ \|_n) &= \sup\ \{\, \|x\|_{MAX,p} \mid x \in M_p(X), \|x\|_{MIN,p} \le 1,\, p \in \mathbf{N}\,\} \\ &= \big\|Id : MIN(X, \|\ \|_n) \to MAX(X, \|\ \|_n)\big\|_{cb} \end{aligned}$$

Ceci n'est rien d'autre que la distance c.b. entre la structure MIN et MAX, voir la proposition I.6.4. Le corollaire I.3.10 et la proposition I.1.14 entraînent le corollaire suivant.

Corollaire I.3.12. *Soit $(X, \|\ \|_n)$ un M_n-espace, alors*

$$\alpha(X, \|\ \|_n) = \alpha(X^*, \|\ \|_n^*).$$

Ensuite on généralise facilement [**40**, Proposition 2.3] et [**41**, Proposition 2.2].

Proposition I.3.13. *Soit X un M_n-espace de dimension finie $N < \infty$ et soient $(e_1, e_2, \dots, e_N)$ une base de X et $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_N^*)$ une base de X^* biorthonormale à (e_i). Notons*

$$B_{\boldsymbol{M}_n}(X, \|\ \|_n) = \left\{ \underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in {\boldsymbol{M}_n}^N \;\middle|\; \Big\|\sum_{i=1}^N \lambda_i \otimes e_i\Big\|_n \le 1 \right\}$$

et

$$B_{\boldsymbol{M}_n}(X^*, \|\ \|_n^*) = \left\{ \underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) \in {\boldsymbol{M}_n}^N \;\middle|\; \Big\|\sum_{i=1}^N \mu_i \otimes e_i^*\Big\|_n^* \le 1 \right\}.$$

(i) Pour $x = \sum b_k \otimes e_k$ où $a_i \in \boldsymbol{M}_p$, on a les formules

$$\|x\|_{MIN,p} = \sup \left\{ \Big\|\sum_{k=1}^N \mu_k \otimes b_k\Big\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_p} \;\middle|\; \underline{\mu} \in B_{\boldsymbol{M}_n}(X^*, \|\ \|_n^*) \right\}$$

$$\|x\|_{MAX,p} = \inf \left\{ \Big\|\sum_{k=1}^N \alpha_i \alpha_i^*\Big\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} \Big\|\sum_{k=1}^N \beta_i^* \beta_i\Big\|_{\boldsymbol{M}_p}^{1/2} \;\middle|\; \exists \underline{\lambda_i} \in B_{\boldsymbol{M}_n}(X, \|\ \|_n)\, \forall k \in \{1, \dots, n\} : b_k = \sum \alpha_i \lambda_{i,k} \beta_i \right\}$$

(ii) On a

$$\alpha(X, \|\ \|_n) = \sup\left\{ \left\|\sum_{i=1}^N a_i \otimes b_i\right\|_{\min} \;\middle|\; a_i, b_i \in B(H) \ t.q. \right.$$

$$\forall \underline{\lambda} \in B_{\boldsymbol{M}_n}(X, \|\ \|_n) : \left\|\sum_{i=1}^N \lambda_i \otimes a_i\right\|_{M_n(B(H))} \le 1 \quad et$$

$$\left. \forall \underline{\mu} \in B_{\boldsymbol{M}_n}(X_n^*, \|\ \|_n^*) : \left\|\sum_{i=1}^N \mu_i \otimes b_i\right\|_{M_n(B(H))} \le 1 \right\}$$

Démonstration. Les formules (i) ne sont que des reformulations de (I.3.1) et (I.3.2b) respectivement. Alors (ii) est élémentaire en utilisant le fait que pour $T : X \to B(H)$ et $a_i = T(e_i)$ on a

$$\|T\|_n = \sup\left\{ \left\|\sum_{k=1}^N \lambda_k \otimes a_k\right\|_{M_n(B(H))} \;\middle|\; \lambda_k \in \boldsymbol{M}_n \text{ t.q. } \left\|\sum_{k=1}^N \lambda_k \otimes e_k\right\|_n \le 1 \right\}.$$

□

I.4. Sous-algèbres de $C(K; \boldsymbol{M}_n)$

Ce paragraphe est consacré à une généralisation du lemme de Craw [**14**]. Pour cela on a besoin du petit lemme suivant.

Lemme I.4.1. *Soient $a_1, a_2, \dots, a_m \in \boldsymbol{M}_n$ des contractions et soit p un polynôme non-commutatif à m variables avec coefficient constant nul. Alors*

$$\|p(a_1, a_2, \dots, a_m)\|_{\boldsymbol{M}_n} \le \sup\ \{ \|p(u_1, u_2, \dots, u_m)\|_{\boldsymbol{M}_n} \mid u_i \in \boldsymbol{M}_n \ \textit{unitaire} \}$$

et on notera $\|p\|_{\infty,n}$ ce supremum.

Démonstration. On reprend la démonstration de [**38**] (voir aussi [**49**, Ch. 1] et [**8**]). Par décomposition polaire, pour chaque i on peut écrire $a_i = v_i|a_i|$, où v_i est une matrice unitaire et $|a_i| = (a_i^* a_i)^{1/2}$ est positive. On a donc une décomposition spectrale

$$|a_i| = u_i \begin{bmatrix} s_1(a_i) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n(a_i) \end{bmatrix} u_i^*$$

où $s_k(a_i) \le 1$ sont les valeurs caractéristiques de a_i et $u_i \in \boldsymbol{M}_n$ est unitaire. On peut donc écrire

$$p(a_1, a_2, \dots, a_m) = \left[p_{ij}\left(s_1(a_1), s_2(a_1), \dots, s_n(a_m)\right)\right]$$

où p_{ij} sont des polynômes sur le disque $\mathbf{D}^{mn}$ tels que

$$\left[p_{ij}(z_{11}, z_{21}, \dots, z_{nm})\right] = p\left(v_1 u_1 \begin{bmatrix} z_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_{n1} \end{bmatrix} u_1^*, \dots, v_m u_m \begin{bmatrix} z_{1m} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_{nm} \end{bmatrix} u_m^* \right).$$

La fonction

$$(z_{11}, \dots, z_{nm}) \to \left\| \left[p_{ij}(z_{11}, z_{21}, \dots, z_{nm})\right] \right\|_{\boldsymbol{M}_n},$$

étant sous-harmonique sur $\mathbf{D}^{mn}$, atteint son sup sur $\{ (z_{11}, \dots, z_{nm}) \mid |z_{ij}| = 1 \}$ et dans ce cas là les a_i sont unitaires, d'où la conclusion du lemme. □

Corollaire I.4.2. *Soit X un quotient d'une sous-algèbre de $C(K;\boldsymbol{M}_n)$. Alors pour toutes $\hat{x}_1,\hat{x}_2,\dots,\hat{x}_m \in X$ et pour tout polynôme non-commutatif à m variables avec coefficient constant nul on a*

$$\|p(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\dots,\hat{x}_m)\|_X \le \|p\|_{\infty,n}$$

Ce corollaire donne une des implications de la proposition suivante.

Proposition I.4.3. *Soit X une algèbre de Banach. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe un compact K tel que X est un quotient d'une sous-algèbre de $C(K;\boldsymbol{M}_n)$.

(ii) Il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $m\in\mathbf{N}$, pour tout polynôme non-commutatif à m variables avec coefficient constant nul et pour toutes $x_1,x_2,\dots,x_m \in X$ avec $\|x_i\|\le C$ on a

$$\|p(x_1,x_2,\dots,x_m)\|_X \le \|p\|_{\infty,n}.$$

Démonstration. Soit $\Gamma = \{\, x\in X \mid \|x\|\le C \,\}$ et soit K la boule unité de $\ell_\infty(\Gamma;\boldsymbol{M}_n)$ munie de la topologie $*$-faible du prédual $\ell_1\hat{\otimes}S_n^1$. Alors tout $x\in\Gamma$ définit un élément $e_x\in C(K;\boldsymbol{M}_n)$ en posant $e_x(\omega)=\omega_x$. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des polynômes non-commutatifs à coefficient constant nul et soit

$$Y_0 = \{\, p(e_{x_1},e_{x_2},\dots,e_{x_m}) \mid m\in\mathbf{N}, x_i\in X, p\in\mathcal{A} \,\}$$

la sous-algèbre de $C(K;\boldsymbol{M}_n)$ engendrée par $\{\, e_x \mid x\in X \,\}$, dont la complétion sera noté par Y. Alors

$$T : Y \to X$$
$$p(e_{x_1},\dots,e_{x_m}) \mapsto p(x_1,\dots,x_m)$$

est un homomorphisme surjectif. □

I.5. Produits tensoriels

Dans la catégorie des espaces d'opérateurs il y a une théorie bien développée des produits tensoriels analogue à la théorie des produits tensoriels des espaces de Banach. Il y a donc a priori une abondance de M_n-structures sur le produit tensoriel de deux M_n-espaces induites par les différents produits tensoriels des structures d'espace d'opérateurs. On va voir dans cette section certaines n-normes «naturelles» qui ne dépendent que de la M_n-structure des espaces composants.

Rappelons donc la définition des cross-normes d'espaces d'opérateurs (cf. [**6**]). Soient X et Y des espaces d'opérateurs. Une norme matricielle $\{\alpha_k\}$ sur $X\otimes Y$ est appelée une *cross-norme d'espaces d'opérateurs* si elle vérifie les axiomes de Ruan et si en plus on a pour $m,n\in\mathbf{N}$ et $x\in M_m(X)$, $y\in M_n(Y)$ l'inégalité

(I.5.1) $$\alpha_{mn}(x\otimes y) \le \|x\|_{M_m(X)}\,\|y\|_{M_n(Y)}.$$

L'analogue de cette condition pour les M_n-espaces n'est pas «naturelle», car elle suggère plutôt de considérer $M_{n^2}(X\otimes Y)$ au lieu de $M_n(X\otimes Y)$. En effet, on a la formule suivante pour le produit tensoriel minimal des espaces d'opérateurs ([**6**, Theorem 5.1]) :

$$\|u\|_{M_n(X\otimes_{\min}Y)} = \sup \big\|\langle f\otimes g, u\rangle\big\|_{\boldsymbol{M}_p\otimes\boldsymbol{M}_q\otimes\boldsymbol{M}_n}$$

où le sup porte sur $p,q\in\mathbf{N}$ et $f\in M_p(X^*)$, $g\in M_q(Y^*)$ avec $\|f\|_p^*\le 1$, $\|g\|_q^*\le 1$. En particulier, la norme sur $M_n(X\otimes_{\min}Y)$ dépend des structures d'espace d'opérateurs de X et Y entières et la donnée de leurs M_n-structure ne la détermine pas.

Par contre, quelques variantes du produit tensoriel de Haagerup sont très bien adaptées à notre situation.

Définition I.5.1. Soient $(X, \|\ \|_n)$ et $(Y, \|\ \|_n)$ deux M_n-espaces. Pour $x \in M_n(X)$ et $y \in M_n(Y)$ on note $u = x \odot y \in M_n(X \otimes Y)$ la matrice $u_{ij} = \sum_k x_{ik} \otimes y_{kj}$. Soit A une algèbre et soient $\rho : X \to A$ et $\sigma : Y \to A$ des applications linéaires continues. Alors on note $\rho \cdot \sigma : X \otimes Y \to A$ la réduction de $\rho \otimes \sigma$

$$\rho \cdot \sigma \left(\sum x_i \otimes y_i \right) = \sum \rho(x_i) \sigma(y_i);$$

on a en particulier $(\rho \cdot \sigma)_n (x \odot y) = \rho_n(x) \sigma_n(y)$, où le produit est à évaluer dans l'algèbre $M_n(A)$.

Considérons pour $u \in M_n(X \otimes Y)$ les normes suivantes.

(I.5.2)
$$\|u\|_{f,n} = \sup \left\{ \|(\rho \cdot \sigma)_n(u)\|_{M_n(B(H))} \,\middle|\, \rho : X \to B(H), \sigma : Y \to B(H) \ n\text{-contractions} \right\}$$

Ceci n'est rien d'autre que la norme induite sur $M_n(X \otimes Y)$ par l'espace d'opérateurs $MAX(X, \|\ \|_n) \otimes_h MAX(Y, \|\ \|_n)$, puisque par définition de MAX, $B_n((X, \|\ \|_n), B(H)) = CB(MAX(X, \|\ \|_n), B(H))$ isométriquement (cf. [**47**]). D'autre part, on a un analogue de [**3**, Prop. 6] comme suit.

(I.5.3)
$$\begin{aligned} &\|u\|_{M_n(MIN(X, \|\ \|_n) \otimes_h MIN(Y, \|\ \|_n))} = \\ &= \inf \Bigg\{ \sup \Big\{ \Big\| \sum f_n(x_i) f_n(x_i)^* \Big\|^{1/2}_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \Big\| \sum g_n(y_i)^* g_n(y_i) \Big\|^{1/2}_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \ \Big| \\ &\qquad f \in M_n(X^*), \|f\|_n^* \le 1; g \in M_n(Y^*), \|g\|_n^* \le 1 \Big\} \ \Bigg| \ u = \sum x_i \odot y_i \Bigg\} \end{aligned}$$

En effet [**6**],

$$\|u\|_h = \inf \left\{ \| [x_1, \dots, x_m] \|_{M_{1,m}(M_n(X))} \left\| \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \right\|_{M_{m,1}(M_n(Y))} \ \middle| \ u = \sum_{i=1}^m x_i \odot y_i, m \in \mathbf{N} \right\}$$

et

$$\begin{aligned} &\| [x_1, \dots, x_m] \|_{M_{1,m}(M_n(X))} = \\ &\quad = \sup \left\{ \| [f_n(x_1), \dots, f_n(x_m)] \|_{M_{1,m}(\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n)} \ \middle| \ f : X \to \boldsymbol{M}_n \ n\text{-contractante} \right\} \\ &\quad = \sup \left\{ \Big\| \sum f_n(x_i) f_n(x_i)^* \Big\|^{1/2}_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \ \middle| \ f : X \to \boldsymbol{M}_n \ n\text{-contractante} \right\}. \end{aligned}$$

Pour la catégorie des M_n-espaces il conviendra de considérer les normes tensorielles avec les propriétés suivantes, analogues aux produits tensoriels d'espaces de Banach, (cf. [**18**, Chap. 8]).

Définition I.5.2. Soient $(X, \|\ \|_n)$ et $(Y, \|\ \|_n)$ des M_n-espaces et soit α une n-norme sur $X \otimes Y$. Définissons une dualité $< \ , \ >_\odot$ entre $M_n(X \otimes Y)$ et $M_n(X^*, Y^*)$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n$ en posant pour $u^* = \sum \alpha_i \otimes f_i \otimes g_i \in M_n \otimes X^* \otimes Y^*$ et $u = \sum \beta_j \otimes x_j \otimes y_j \in M_n \otimes X \otimes Y$

$$\langle u^*, u \rangle_\odot = \sum_{ij} \alpha_i \otimes \beta_j \, \langle f_i, x_j \rangle \, \langle g_i, y_j \rangle;$$

autrement dit, on a pour $f \in M_n(X^*)$, $g \in M_n(Y^*)$, $x \in M_n(X)$ et $y \in M_n(Y)$

$$\langle f \odot g, x \odot y\rangle_\odot = \langle f, x\rangle \langle g, y\rangle = \left[\sum_{jq} \langle f_{ij}, x_{pq}\rangle \langle g_{jk}, y_{qr}\rangle\right]_{ip,kr} \in \boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n$$

et par linéarité, si $u^* \in M_n(X^* \otimes Y^*)$ et $u \in M_n(X \otimes Y)$ peuvent être écrit sous la forme $u^* = \sum f_i \odot g_i$ et $u = \sum x_j \odot y_j$ respectivement, on a

$$\langle u^*, u\rangle_\odot = \sum_{ij} \langle f_i \odot g_i, x_j \odot y_j\rangle_\odot .$$

Cette dualité permet grace la remarque I.1.13 2 d'identifier le M_n-espace dual $(X \otimes Y, \alpha)^*$ avec le complété de $(X^* \otimes Y^*, \alpha^*)$, où l'on pose

$$\alpha^*(u^*) = \sup \left\{ \|\langle u^*, u\rangle_\odot\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \,\middle|\, u \in M_n(X \otimes Y), \alpha(u) \leq 1 \right\}.$$

Alors α est dite une *norme raisonnable* si elle vérifie la condition (R) et en plus les propriétés suivantes.

1. Pour toutes $x \in M_n(X)$ et $y \in M_n(X)$ on a l'inégalité

$$\alpha(x \odot y) \leq \|x\|_n \, \|y\|_n. \tag{I.5.4a}$$

2. Pour toutes $f \in M_n(X^*)$ et $g \in M_n(Y^*)$ on a

$$\alpha^*(f \odot g) \leq \|f\|_n^* \, \|g\|_n^*. \tag{I.5.4b}$$

Remarque I.5.3. Soient X et Y des M_n-espaces et soit α une norme raisonnable sur $M_n(X \otimes Y)$.

1. Pour clarifier notons que par définition $M_n(X^*) = B_n(X, \boldsymbol{M}_n)$ isométriquement où l'on identifie une application linéaire continue $\rho : X \to \boldsymbol{M}_n$ avec la matrice $f \in M_n(X^*)$ donnée par $f_{ij}(x) = (\rho(x))_{ij}$. Alors si l'on note $g \in M_n(Y^*)$ la matrice correspondant à $\sigma : Y \to \boldsymbol{M}_n$, on a l'identité

$$I_{\boldsymbol{M}_n} \otimes (\rho \cdot \sigma)(u) = \langle f \odot g, u\rangle_\odot$$

pour $u \in M_n(X \otimes Y)$.

2. Pour toutes $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n$, $x_i \in M_n(X)$, $y_i \in M_n(Y)$, $f_i \in M_n(X^*)$ et $g_i \in M_n(Y^*)$ on a

$$\alpha\left(\sum \alpha_i \cdot x_i \odot y_i \cdot \beta_i\right) \leq \left\|\sum \alpha_i \alpha_i^*\right\|^{1/2} \left\|\sum \beta_i^* \beta_i\right\|^{1/2} \max \|x_i\|_n \, \max \|y_i\|_n \tag{I.5.5a}$$

$$\alpha^*\left(\sum \alpha_i \cdot f_i \odot g_i \cdot \beta_i\right) \leq \left\|\sum \alpha_i \alpha_i^*\right\|^{1/2} \left\|\sum \beta_i^* \beta_i\right\|^{1/2} \max \|f_i\|_n^* \, \max \|g_i\|_n^* \tag{I.5.5b}$$

Proposition I.5.4. *La norme*

$$\begin{aligned} \|u\|_{\vee,n} &= \sup \left\{ \|\langle f \odot g, u\rangle_\odot\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \mid f \in M_n(X^*), \|f\|_n^* \leq 1,\, g \in M_n(Y^*), \|g\|_n^* \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \|I_{\boldsymbol{M}_n} \otimes (\rho \cdot \sigma)(u)\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \mid \rho : X \to \boldsymbol{M}_n, \sigma : Y \to \boldsymbol{M}_n \ n\text{-contractions} \right\} \end{aligned} \tag{I.5.6}$$

est la plus petite norme raisonnable sur $M_n(X \otimes Y)$. En plus, elle est injective dans le sens que pour toutes inclusions n-isométriques $X \subseteq X'$ et $Y \subseteq Y'$, l'inclusion $X \otimes_{\vee,n} Y \subseteq X' \otimes_{\vee,n} Y'$ est n-isométrique aussi. Finalement, pour toutes applications linéaires $u : X_1 \to X_2$ et $v : Y_1 \to Y_2$ on a

$$\|u \otimes v : X_1 \otimes_{\vee,n} Y_1 \to X_2 \otimes_{\vee,n} Y_2\|_n \leq \|u\|_n \|v\|_n. \tag{I.5.7}$$

DÉMONSTRATION. Vérifions d'abord les conditions de la définition I.5.2. La remarque I.1.13 (2.) s'applique à $\| \ \|_{\vee,n}$ et (R) est donc satisfaite ; l'inégalité (I.5.4b) est une conséquence immédiate de la définition et il reste à vérifier (I.5.4a) :

$$\begin{aligned}\|x \odot y\|_{\vee,n} &= \sup \{ \|\langle f, x\rangle \, \langle g, y\rangle\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \mid \|f\|_n^* \leq 1, \|g\|_n^* \leq 1 \} \\ &\leq \|x\|_n \, \|y\|_n.\end{aligned}$$

Soit maintenant α une norme raisonnable quelconque sur $M_n(X \otimes Y)$, soient $f \in M_n(X^*)$, $g \in M_n(Y^*)$ et soit $u \in M_n(X \otimes Y)$. Alors la condition (I.5.4b) sur α^* entraîne que

$$\|\langle f \odot g, u\rangle_{\odot}\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \leq \|f\|_n^* \, \|g\|_n^* \, \alpha(u)$$

et par conséquent

$$\|u\|_{\vee,n} = \sup \left\{ \|\langle f \odot g, u\rangle_{\odot}\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} : \|f\|_{M_n(X^*)} \leq 1, \|g\|_{M_n(Y^*)} \leq 1 \right\} \leq \alpha(u).$$

L'injectivité de $\| \ \|_{\vee,n}$ est une conséquence du théorème d'extension de Wittstock (Proposition I.1.16) et (I.5.7) résulte immédiatement de la définition de la structure MIN, et de la proposition I.1.14 :

$$\begin{aligned}\Big\|(u \otimes v)_n\Big(\sum x_i \odot y_i\Big)\Big\|_{\vee,n} &= \sup \Big\{ \Big\|\sum \langle f, u_n(x_i)\rangle \, \langle g, v_n(y_i)\rangle\Big\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \ \Big| \\ &\qquad\qquad f \in M_n(X_2^*), \|f\|_n^* \leq 1, g \in M_n(Y_2^*), \|g\|_n^* \leq 1 \Big\} \\ &= \sup \Big\{ \Big\|\sum \langle u_n^*(f), x_i\rangle \, \langle v_n^*(g), y_i\rangle\Big\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \ \Big| \\ &\qquad\qquad f \in M_n(X_2^*), \|f\|_n^* \leq 1, g \in M_n(Y_2^*), \|g\|_n^* \leq 1 \Big\} \\ &\leq \|u\|_n \, \|v\|_n \, \Big\|\sum x_i \odot y_i\Big\|_{\vee,n}.\end{aligned}$$

□

Définition I.5.5. Soient X, Y, Z des M_n-espaces. Notons $Bil_n(X, Y; Z)$ l'espace des applications bilinéaires et définissons $\psi_n : M_n(X) \times M_n(Y) \to M_n(Z)$ par

$$\psi_n(x, y)_{ij} = \sum_k \psi(x_{ik}, y_{kj});$$

alors on peut munir $Bil_n(X, Y; Z)$ de la norme

$$\begin{aligned}\|\psi\|_{Bil_n} = \sup \Big\{ \Big\|\sum \psi_n(\alpha_i \cdot x_i, y_i \cdot \beta_i)\Big\|_{M_n(Z)} \ \Big| \ \alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n \\ \Big\|\sum \alpha_i \alpha_i^*\Big\| \leq 1, \Big\|\sum \beta_i^* \beta_i\Big\| \leq 1, \|x_i\|_n \leq 1, \|y_i\|_n \leq 1 \Big\}.\end{aligned}$$

En particulier, $Bil_n(X, Y; \mathbf{C})$ a une M_n-structure canonique donnée par

$$M_n(Bil_n(X, Y; \mathbf{C})) = Bil_n(X, Y; \boldsymbol{M}_n).$$

Alors on a

Proposition I.5.6. *Soient X, Y des M_n-espaces. À chaque $u = \sum \alpha_i \otimes x_i \otimes y_i \in M_n(X \otimes Y)$ on associe une forme bilinéaire $T(u)$ sur $X^* \times Y^*$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}_n$ en posant*

$$T(u)(f, g) = \sum \alpha_i \, \langle f, x_i\rangle \, \langle g, y_i\rangle.$$

Autrement dit, si u a la forme spéciale $u = x \odot y$ avec $x \in M_n(X)$ et $y \in M_n(Y)$, on a

$$T(x \odot y)(f,g) = \langle f, x\rangle \, \langle g, y\rangle = \Big[\sum_j \langle f, x_{ij}\rangle \, \langle g, y_{jk}\rangle\Big]_{i,k}.$$

Alors l'inclusion

$$T : M_n(X \otimes_{\vee,n} Y) \to Bil_n(X^*, Y^*; \boldsymbol{M}_n)$$

est une isométrie.

Démonstration. Par la définition de $\| \, \|_{\vee,n}$ on a pour tout $u \in M_n(X \otimes Y)$ l'inégalité

$$\|u\|_{\vee,n} = \sup \left\{ \|T(u)_n(f,g)\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \,\Big|\, \|f\|_{M_n(X^*)} \leq 1, \|g\|_{M_n(Y^*)} \leq 1 \right\} \leq \|T(u)\|_{Bil_n};$$

pour vérifier l'inégalité inverse, on estime, pour $f_i \in M_n(X^*)$, $g_i \in M_n(Y^*)$ et $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n$,

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum T(u)_n(\alpha_i \cdot f_i, g_i \cdot \beta_i)\Big\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} &= \\
&= \Big\|\Big\langle \sum \alpha_i \cdot f_i \odot g_i \cdot \beta_i, u \Big\rangle_\odot \Big\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \\
&= \Big\|\sum (\alpha_i \otimes I_n) \, T(f_i \odot g_i)_n(u) \, (\beta_i \otimes I_n)\Big\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \\
&\leq \Big\|\sum \alpha_i \alpha_i^*\Big\|^{1/2} \max \|f_i\|_n^* \|g_i\|_n^* \, \|u\|_{\vee,n} \, \Big\|\sum \beta_i^* \beta_i\Big\|^{1/2}
\end{aligned}$$

□

Proposition I.5.7. *La norme*

$$\|u\|_{\wedge,n} = \sup \{ \|\psi_n(u)\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \mid \psi \in Bil_n(X, Y; \boldsymbol{M}_n), \|\psi\|_{Bil_n} \leq 1 \}$$

est la plus grande norme raisonnable sur $M_n(X \otimes Y)$.

Démonstration. Il est clair que $\| \, \|_{\wedge,n}$ est une semi-norme qui vérifie (R) . Par l'inclusion isométrique $T : M_n(X^* \otimes_{\vee,n} Y^*) \subseteq Bil_n(X^{**}, Y^{**}; \boldsymbol{M}_n)$ on peut considérer $\hat{T}(f \odot g) = T(f \odot g)|_{X \otimes Y}$, pour des contractions $f \in M_n(X^*)$ et $g \in M_n(Y^*)$, comme élément de la boule unité de $Bil_n(X, Y; \boldsymbol{M}_n)$ et on a donc

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\vee,n} &= \sup \{ \|\hat{T}(f \odot g)_n(u)\| \mid \|f\|_n^* \leq 1, \|g\|_n^* \leq 1 \} \\
&\leq \sup \{ \|\psi_n(u)\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \mid \psi \in Bil_n(X, Y; \boldsymbol{M}_n), \|\psi\|_{Bil_n} \leq 1 \} \\
&= \|u\|_{\wedge,n}
\end{aligned} \tag{I.5.8}$$

pour tout $u \in M_n(X \otimes Y)$. Ceci montre que $\| \, \|_{\wedge,n}$ est une norme sur $M_n(X \otimes Y)$. La condition (I.5.4b) est satisfaite comme conséquence de (I.5.8) et la définition (I.5.6). Il reste à montrer (I.5.4a) :

$$\|x \odot y\|_{\wedge,n} = \sup \{ \|\psi_n(x,y)\| \mid \psi \in Bil_n(X, Y; \boldsymbol{M}_n), \|\psi\|_{Bil_n} \leq 1 \} \leq \|x\|_n \|y\|_n.$$

Soit maintenant α une norme raisonnable quelconque sur $M_n(X \otimes Y)$ et soit $u \in M_n(X \otimes Y)$. Alors comme pour la norme $\| \, \|_{\vee,n}$ le théorème I.1.9 fournit une représentation de la norme

$$\alpha(u) = \sup \left\{ \|\langle u^*, u\rangle_\odot\|_{\boldsymbol{M}_n \otimes \boldsymbol{M}_n} \mid u^* \in M_n((X \otimes Y, \alpha)^*), \|u^*\|_{\alpha,n}^* \leq 1 \right\}$$

et tout $u^* \in M_n((X\otimes Y,\alpha)^*)$ correspond à un élément $\psi \in Bil_n(X,Y;\boldsymbol{M}_n)$ en posant $\psi(x,y) = u^*(x\otimes y) \in \boldsymbol{M}_n$. Cette forme bilinéaire vérifie

$$\begin{aligned}\left\|\sum \psi_n(\alpha_i\cdot x_i, y_i\cdot\beta_i)\right\|_{\boldsymbol{M}_n\otimes\boldsymbol{M}_n} &= \left\|\left\langle u^*, \sum \alpha_i\cdot x_i\odot y_i\cdot\beta_i\right\rangle_{\odot}\right\|_{\boldsymbol{M}_n\otimes\boldsymbol{M}_n}\\ &\leq \alpha\left(\sum \alpha_i\cdot x_i\odot y_i\cdot\beta_i\right)\|u^*\|^*_{\alpha,n}\\ &\leq \left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|^{1/2}\max\|x_i\|\,\|y_i\|\left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\|^{1/2}\|u^*\|^*_{\alpha,n}\end{aligned}$$

puisque α est une norme raisonnable. Ceci implique que la boule unité de $M_n((X\otimes Y,\alpha)^*)$ est contenue dans celle de $M_n((X\otimes_{\wedge,n}Y)^*)$. □

Proposition I.5.8. *Soient $(X,\|\ \|_n)$ et $(Y,\|\ \|_n)$ des M_n-espaces.*

(i) On a la formule suivante pour la norme raisonnable maximale sur $M_n(X\otimes Y)$:

$$\text{(I.5.9)}\quad \|u\|_{\wedge,n} = \inf\left\{\left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|^{1/2}\left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\|^{1/2}\max\|x_i\|_n\max\|y_i\|_n \;\middle|\; u = \sum \alpha_i\cdot x_i\odot y_i\cdot\beta_i,\ \alpha_i,\beta_i\in\boldsymbol{M}_n, x_i\in\boldsymbol{M}_n(X), y_i\in\boldsymbol{M}_n(Y)\right\}$$

(ii) Pour tout $u\in M_n(X\otimes_{\wedge,n}Y)$ et pour tout $\varepsilon>0$ il existe des matrices $x_i\in M_n(X)$, $y_i\in M_n(Y)$ avec $\|x_i\|_n,\|y_i\|_n\leq 1$ et $\alpha_i,\beta_i\in\boldsymbol{M}_n$ telles que

$$\text{(I.5.10)}\qquad u = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\cdot x_i\odot y_i\cdot\beta_i$$

$$\text{(I.5.11)}\qquad \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\alpha_i^*\right\|^{1/2}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i^*\beta_i\right\|^{1/2}\leq\|u\|_{\wedge,n}+\varepsilon$$

et la somme (I.5.10) *converge absolument pour la norme $\|\ \|_{\wedge,n}$.*

(iii) Le produit tensoriel $\otimes_{\wedge,n}$ est projectif : Soit $Z\subseteq X$ un sous-espace fermé et soit $q : X\to X/Z$ l'application quotient. Alors l'application $q\otimes id : X\otimes_{\wedge,n}Y\to(X/Z)\otimes_{\wedge,n}Y$ est une application n-quotient.

Remarque I.5.9. Les formules (I.5.6) et (I.5.9) montrent que les normes $\|\ \|_{\vee,n}$ et $\|\ \|_{\wedge,n}$ convergent vers les formules équivalentes pour le produit tensoriel de Haagerup [**42**] et on a pour $u\in M_p(X\otimes Y)$

$$\|u\|_{M_p(X\otimes_h Y)} = \sup_{n\geq p}\|u\|_{M_n(X\otimes_{\vee,n}Y)} = \inf_{n\geq p}\|u\|_{M_n(X\otimes_{\wedge,n}Y)}.$$

Démonstration. (i) Soit α la norme définie par le coté droit de (I.5.9). Alors $\|u\|_{\wedge,n}\leq\alpha(u)$ par (I.5.5a) et α est une norme raisonnable. La condition (I.5.4b) est immédiate et il reste à montrer (R) . Soit $u = \sum \alpha_i \cdot u_i \cdot \beta_i$, alors

$$\begin{aligned}
\alpha(u) \leq \inf\Bigg\{ & \Big\|\sum_i \alpha_i \Big(\sum_k \gamma_k^{(i)} \gamma_k^{(i)*}\Big) \alpha_i^*\Big\|^{1/2} \Big\|\sum_i \beta_i^* \Big(\sum_k \delta_k^{(i)*} \delta_k^{(i)}\Big) \beta_i\Big\|^{1/2} \times \\
& \times \max_{i,k} \|x_k^{(i)}\| \max_{i,k} \|y_k^{(i)}\| \ \Bigg| \ u_i = \sum_k \gamma_k^{(i)} \cdot x_k^{(i)} \odot y_k^{(i)} \cdot \delta_k^{(i)} \Bigg\} \\
\leq \inf\Bigg\{ & \Big\|\sum_i \alpha_i \alpha_i^*\Big\|^{1/2} \max_i \Big\|\sum_k \gamma_k^{(i)} \gamma_k^{(i)*}\Big\|^{1/2} \Big\|\sum_i \beta_i^* \beta_i\Big\|^{1/2} \max_i \Big\|\sum_k \delta_k^{(i)*} \delta_k^{(i)}\Big\|^{1/2} \times \\
& \times \max_{i,k} \|x_k^{(i)}\| \max_{i,k} \|y_k^{(i)}\| \ \Bigg| \ u_i = \sum_k \gamma_k^{(i)} \cdot x_k^{(i)} \odot y_k^{(i)} \cdot \delta_k^{(i)} \Bigg\} \\
\leq & \Big\|\sum_i \alpha_i \alpha_i^*\Big\|^{1/2} \Big\|\sum_i \beta_i^* \beta_i\Big\|^{1/2} \max_i \alpha(u_i).
\end{aligned}$$

(ii) Soit $u_k \in M_n(X \otimes Y)$ une suite approximante pour u telle que $\|u - u_k\|_{\wedge,n} < \frac{\varepsilon}{2^{k+3}}$ et soit

$$u_1 = \sum_{i=1}^{i(1)} \alpha_i \cdot x_i \odot y_i \cdot \beta_i$$

une décomposition de u_1 telle que

$$\Big\|\sum_{i=1}^{i(1)} \alpha_i \alpha_i^*\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^{i(1)} \beta_i^* \beta_i\Big\| \leq \|u_1\|_{\wedge,n} + \frac{\varepsilon}{2^4}.$$

Comme

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{\wedge,n} \leq \|u - u_{k+1}\|_{\wedge,n} + \|u - u_k\|_{\wedge,n} < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$$

on peut décomposer

$$u_{k+1} - u_k = \sum_{i=i(k)+1}^{i(k+1)} \alpha_i \cdot x_i \odot y_i \cdot \beta_i$$

de sorte que

$$\Big\|\sum_{i=i(k)+1}^{i(k+1)} \alpha_i \alpha_i^*\Big\| = \Big\|\sum_{i=i(k)+1}^{i(k+1)} \beta_i^* \beta_i\Big\| < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

Alors la somme

$$u_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (u_{k+1} - u_k)$$

converge absolument vers u et on a

$$\Big\|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \alpha_i^*\Big\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Big\|\sum_{i=i(k)+1}^{i(k+1)} \alpha_i \alpha_i^*\Big\| < \|u\|_{\wedge,n} + \varepsilon$$

$$\Big\|\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^* \beta_i\Big\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Big\|\sum_{i=i(k)+1}^{i(k+1)} \beta_i^* \beta_i\Big\| < \|u\|_{\wedge,n} + \varepsilon.$$

(iii) Soit $\hat{u} \in M_n\big((X/Z)\otimes_{\wedge,n}Y\big)$. Alors en utilisant ce que l'on a montré dans le paragraphe précédent on peut trouver des $\hat{x}_i \in M_n(X/Z)$, $y_i \in M_n(Y)$ et $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n$ telles que

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot \hat{x}_i \odot y_i \cdot \beta_i$$

et $\|\hat{x}_i\|_n < 1$, $\|y_i\|_n \leq 1$, ainsi que $\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\|^{1/2} \, \|\sum \beta_i^*\beta_i\|^{1/2} \leq \|\hat{u}\|_{\wedge,n} + \varepsilon$. Ensuite il existe des $x_i \in M_n(X)$ telles que $q_n(x_i) = \hat{x}_i$ et $\|x_i\|_n < 1$. Posons

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot x_i \odot y_i \cdot \beta_i;$$

alors $u \in M_n(X\otimes_{\wedge,n}Y)$ puisque la suite converge absolument pour la norme $\| \ \|_{\wedge,n}$ (ainsi que pour toute norme raisonnable) comme conséquence de (I.5.5a) et $(q\otimes id)_n(u) = \hat{u}$ avec

$$\|u\|_{\wedge,n} \leq \Big\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\Big\|^{1/2} \Big\|\sum \beta_i^*\beta_i\Big\|^{1/2} \leq \|\hat{u}\|_{\wedge,n} + \varepsilon.$$

□

Comme pour les espaces de Banach, le dual du produit tensoriel projectif est l'espace des fonctions bilinéaires continues :

Proposition I.5.10. *On a l'identité isométrique*

(I.5.12) $$Bil_n(X \times Y; Z) = B_n(X\otimes_{\wedge,n}Y, Z);$$

en particulier,

(I.5.13) $$M_n((X\otimes_{\wedge,n}Y)^*) = Bil_n(X \times Y; \boldsymbol{M}_n)$$

isométriquement.

Démonstration. Notons $\hat{\psi}$ l'application linéaire de $X\otimes Y$ dans Z correspondante à $\psi \in Bil(X, Y; Z)$. Soit $u \in M_n(X\otimes Y)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des matrices $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{M}_n$ et des matrices $x_i \in M_n(X)$, $y_i \in M_n(Y)$ telles que

$$u = \sum \alpha_i \cdot x_i \odot y_i \cdot \beta_i$$

et d'autre part,

$$\Big\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\Big\| < \|u\|_{\wedge,n} + \varepsilon \qquad \Big\|\sum \beta_i^*\beta_i\Big\| < \|u\|_{\wedge,n} + \varepsilon$$
$$\|x_i\|_n \leq 1 \qquad \|y_i\|_n \leq 1.$$

On a donc

$$\|\hat{\psi}_n(u)\|_{M_n(Z)} = \Big\|\sum \psi_n(\alpha_i \cdot x_i, y_i \cdot \beta_i)\Big\|_{M_n(Z)} \leq \|\psi\|_{Bil_n} (\|u\|_{\wedge,n} + \varepsilon),$$

i.e. $\|\hat{\psi}_n\| \leq \|\psi_n\|$; l'inégalité inverse est aussi immédiate. □

I.6. Théorie locale des M_n-espaces et des espaces d'opérateurs

Dans cette section on va rappeler quelques notions de la théorie locale des espaces d'opérateurs qui a comme objet la description des espaces d'opérateurs et des M_n-espaces par leurs sous-espaces de dimension finie. On va donc établir des outils pour calculer les distances de Banach-Mazur entre les espaces «classiques» de la section I.7.
Rappelons d'abord une estimation facile (pourtant optimale, on a égalité pour l'application de transposition des matrices, cf. [**59**]).

Lemme I.6.1. *Soient X, Y des M_n-espaces et soit $u : X \to Y$ une application bornée. Alors u est n-bornée avec*

$$\|u\|_n \leq n\,\|u\|$$

Démonstration. Notons d'abord que l'on peut estimer la norme d'une matrice d'opérateurs $[y_{ij}] \in M_n(B(H))$ par une sorte de norme de Frobenius comme suit. On a pour toute suite $\xi_i, \eta_i \in H$

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{ij}\langle y_{ij}\xi_j, \eta_i\rangle\Big| &\leq \sum_{ij}\|y_{ij}\|\,\|\xi_i\|\,\|\eta_j\| \\ &\leq \Big(\sum_{ij}\|y_{ij}\|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_j\|\xi_j\|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_i\|\eta_i\|^2\Big)^{\frac12},\end{aligned}$$

d'où

$$\big\|[y_{ij}]\big\|_n \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n}\|y_{ij}\|^2\right)^{\frac12} \leq n\,\big\|[y_{ij}]\big\|_n$$

comme conséquence de $(\mathrm{R1})'_n$. Soit $x = [x_{ij}] \in M_n(X)$, alors

$$\begin{aligned}\|u_n(x)\|_{M_n(Y)} = \big\|[u(x_{ij})]\big\|_{M_n(Y)} \leq \Big(\sum\|u(x_{ij})\|^2\Big)^{\frac12} \leq \\ \leq \|u\|\,\Big(\sum\|x_{ij}\|^2\Big)^{\frac12} \leq n\,\|u\|\,\|x\|_{M_n(X)}\end{aligned}$$

□

Ensuite rappelons quelques idées de C. Zhang (cf. [**61**]) que l'on peut facilement adapter à notre situation. Pour ceci on a besoin de la notion d'*homogénéité* introduite dans [**50**, §1]

Définition I.6.2. Un espace d'opérateurs X est dit *n-homogène* si toute application n-bornée $u : X \to X$ est complètement bornée avec $\|u\|_{cb} = \|u\|_n$. L'espace X est dit *homogène* s'il est 1-homogène.

Remarque I.6.3. Évidemment, un espace n-homogène est aussi k-homogène pour tout $k \geq n$. Par exemple, les propositions I.3.4 et I.3.6 impliquent que pour un M_n-espace $(X, \|\ \|_n)$ les structures $MIN(X, \|\ \|_n)$ et $MAX(X, \|\ \|_n)$ sont n-homogènes. De plus, si $(X, \{\|\ \|_k\})$ est un espace d'opérateurs n-homogène, alors pour tout $k \geq n$ les espaces $MIN(X, \|\ \|_k)$ et $MAX(X, \|\ \|_k)$ sont n-homogènes aussi. En effet, soit $u : MIN(X, \|\ \|_k) \to MIN(X, \|\ \|_k)$ une application n-bornée. Alors comme $MIN(X, \|\ \|_k)$ est k-homogène, on a

$$\begin{aligned}\big\|u : MIN(X, \|\ \|_k) \to MIN(X, \|\ \|_k)\big\|_{cb} &= \big\|u : MIN(X, \|\ \|_k) \to MIN(X, \|\ \|_k)\big\|_k \\ &= \|u : X \to X\|_k \\ &= \|u : X \to X\|_n \\ &= \big\|u : MIN(X, \|\ \|_k) \to MIN(X, \|\ \|_k)\big\|_n.\end{aligned}$$

Proposition I.6.4 ([**61**, Proposition 2.1]). *Soit $(X, \|\ \|_n)$ un M_n-espace avec deux structures d'espace d'opérateurs compatibles $X' = (X, \{\|\ \|'_k\})$ et $X'' = (X, \{\|\ \|''_k\})$ dont X' est n-homogène et dominée par X'' de sorte que l'on a pour tout entier positif k et pour tout $x \in M_k(X)$*

$$\|x\|'_k \leq \|x\|''_k. \tag{I.6.1}$$

Alors on a pour tout k

(I.6.2a) $$d_k(X', X'') = \|i_X : X' \to X''\|_k$$

et par conséquent

(I.6.2b) $$d_{cb}(X', X'') = \|i_X : X' \to X''\|_{cb}$$

DÉMONSTRATION. La condition (I.6.1) ne dit rien d'autre que $\|i_X^{-1} : X'' \to X'\|_k \leq 1$ pour tout k, d'où l'inégalité $d_k(X', X'') \leq \|i_X\|_k$. L'inégalité inverse est bien claire aussi pour $k \leq n$. Pour $k > n$, notons que $i_X : X' \to X''$ est une n-isométrie et que l'on a, par la n-homogénité de X', pour tout isomorphisme linéaire $T : X' \to X''$,

$$\|T^{-1} i_X : X' \to X'\|_k = \|T^{-1} i_X : X' \to X'\|_n = \|T^{-1} : X'' \to X'\|_n;$$

ensuite,

$$\|i_X\|_k \leq \|T\|_k \, \|T^{-1} i_X\|_k \leq \|T\|_k \, \|T^{-1}\|_n$$

d'où la conclusion. □

Ceci donne une nouvelle interprétation de la constante de Paulsen (cf. Définition I.3.11).

Corollaire I.6.5. *Soit* $(X, \| \|_n)$ *un* M_n*-espace.*

(i) $\alpha(X, \| \|_n) = d_{cb}\big(MIN(X, \| \|_n), MAX(X, \| \|_n)\big)$

(ii) Soit X' *une structure d'espace d'opérateurs sur* X *compatible avec* $\| \|_n$*. Alors*

$$d_{cb}\big(X', MIN(X, \| \|_n)\big) = \|i_X : MIN(X) \to X'\|_{cb} \leq \alpha(X, \| \|_n)$$

et

$$d_{cb}\big(X', MAX(X, \| \|_n)\big) = \|i_X : X' \to MAX(X)\|_{cb} \leq \alpha(X, \| \|_n)$$

Remarque I.6.6. La démonstration de la proposition I.6.4 montre en fait l'énoncé suivant. Soit $(X, \| \|_n)$ un M_n-espace et soient X', X'' deux structures d'espaces d'opérateurs compatibles sur X dont X'' soit n-homogène. Alors pour toute paire de n-isométries $u, v : X' \to X''$ on a $\|u\|_k = \|v\|_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Si les espaces en considération sont en plus hilbertiens on peut se débarrasser de la condition de majorisation. Rappelons d'abord qu'un espace d'opérateurs H est dit *hilbertien*, s'il est hilbertien autant qu'espace de Banach.

Remarque I.6.7. Soit H un espace d'opérateurs hilbertien homogène, alors toute paire de sous-espaces de la même dimension est complètement isométrique. On peut donc parler du sous-espace n-dimensionnel $H_n \subseteq H$. Par le théorème de Russo-Dye un espace d'opérateurs hilbertien H est homogène si et seulement si tout opérateur unitaire $u : H \to H$ est complètement contractant.

Proposition I.6.8 ([**61**, Theorem 3.1])**.** *Soient* H' *et* H'' *des espaces d'opérateurs homogènes isométriques à* ℓ_2*, soient* H'_n *et* H''_n *leurs sous-espaces de dimension* n *et soient* $i_H : H' \to H''$ *et* $i_n : H'_n \to H''_n$ *les applications identités de* ℓ_2 *et* ℓ_2^n *respectivement. Alors pour on a pour* $1 \leq k \leq \infty$

$$d_k(H'_n, H''_n) = \|i_n\|_k \, \|i_n^{-1}\|_k$$

et

$$d_k(H', H'') = \|i_H\|_k \, \|i_H^{-1}\|_k = \sup_n \|i_n\|_k \, \|i_n^{-1}\|_k.$$

Définition I.6.9 ([**48**]). Soit $\mathcal{K}$ l'espace des opérateurs compacts sur ℓ_2 et soit X un espace d'opérateurs de dimension finie. Notons

$$\delta_k(X) = \inf \{ d_{cb}(X,Y) \mid Y \subseteq C(K; \boldsymbol{M}_k),\ K \text{ compact} \}$$

et posons

$$\begin{aligned} d_{S\mathcal{K}}(X) &= \inf \{ d_{cb}(X,Y) \mid Y \subseteq \mathcal{K} \} \\ &= \inf \{ d_{cb}(X,Y) \mid Y \subseteq \boldsymbol{M}_n,\ n \in \mathbf{N} \} \\ &= \inf_k \delta_k(X) \\ &= \inf_{k\to\infty} \delta_k(X) \end{aligned}$$

Pour un espace d'opérateurs X de dimension infinie on définit $d_{S\mathcal{K}}(X) = \sup d_{S\mathcal{K}}(X')$ où le sup porte sur tous les sous-espaces X' de dimension finie de X et on dit que X est *exact* si ce supremum est fini.

En termes de M_n-espaces on a une description alternative de ces nombres.

Proposition I.6.10. *Soit $(X, \{\| \ \|_k\})$ un espace d'opérateurs de dimension finie. Alors on a les identités*

$$\delta_k(X) = d_{cb}\big(X, MIN(X, \| \ \|_k)\big) \tag{I.6.3}$$

et par conséquent

$$d_{S\mathcal{K}}(X) = \inf_k d_{cb}\big(X, MIN(X, \| \ \|_k)\big) \tag{I.6.4}$$

$$= \inf_k \big\| id : MIN(X, \| \ \|_k) \to X \big\|_{cb} \tag{I.6.5}$$

Démonstration. L'inégalité $\delta_k(X) \leq d_{cb}\big(X, MIN(X, \| \ \|_k)\big)$ est clair par la proposition I.3.4. Pour l'inverse on utilise la remarque I.3.5 qui implique que

$$\big\| id : MIN(X, \| \ \|_k) \to X \big\|_{cb} \leq \delta_k(X) \, \big\| id : MIN(X, \| \ \|_k) \to X \big\|_k = \delta_k(X);$$

ensuite la proposition I.3.4 entraîne que

$$\big\| id : X \to MIN(X, \| \ \|_k) \big\|_{cb} = \big\| id : X \to MIN(X, \| \ \|_k) \big\|_k = 1$$

d'où la conclusion. □

I.7. Exemples

I.7.1. $\boldsymbol{M}_n$ et ses sous-espaces. Les algèbres d'opérateurs et leurs sous-espaces sont des exemples naturels de M_n-espaces, dont $\boldsymbol{M}_n$ et ses sous-espaces paraissent particulièrement intéressants, cf. la remarque I.1.8. $\boldsymbol{M}_n$ ayant la structure minimale pour la n-norme, entraîne sur son dual S_1^n la structure $MAX(S_1^n, \| \ \|_n^*)$ comme structure duale standard. Parmi les sous-espaces de $\boldsymbol{M}_n$ figurent ℓ_∞^n et les espaces hilbertiens R_n et C_n, qui ont comme base $\{ e_{1i} \mid i = 1, \ldots, n \}$ et $\{ e_{i1} \mid i = 1, \ldots, n \}$ respectivement. Les normes matricielles sont donc données par

$$\Big\| \sum \alpha_i \otimes e_{1i} \Big\|_{M_k(R_n)} = \Big\| \sum \alpha_i \alpha_i^* \Big\|_{\boldsymbol{M}_k}^{1/2} \quad \text{et} \quad \Big\| \sum \alpha_i \otimes e_{i1} \Big\|_{M_k(C_n)} = \Big\| \sum \alpha_i^* \alpha_i \Big\|_{\boldsymbol{M}_k}^{1/2}$$

respectivement. Notons que R_n et C_n sont en dualité complètement isométriquement et qu'ils sont homogènes, cf. [**4**, Proposition 2.2] ou [**21**, Corollary 4.2]. On va étudier également les versions de dimension infinie de ces espaces, notées R et C respectivement.

La structure d'espace d'opérateurs sur $\boldsymbol{M}_n$ pourtant n'est pas déterminée par la M_n-structure, i.e. $MAX(\boldsymbol{M}_n, \| \, \|_n)$ est différent de $\boldsymbol{M}_n = MIN(\boldsymbol{M}_n, \| \, \|_n)$. Ceci est une conséquence de la proposition suivante, qui montre que même $\alpha(\ell_\infty^n, \| \, \|_k) > 1$ pour tout $k \geq 3$. Pour cela rappelons que $MAX(\ell_1^n) = {\ell_\infty^n}^*$ a une réalisation concrète comme le sous-espace E_1^n de la C^*-algèbre pleine du groupe libre $\mathbf{F}_n$ engendré par $\{ U_i = \pi_u(g_i) \mid i = 1, \dots n \}$, où π_u est la représentation universelle du groupe libre et $g_1, g_2, \dots, g_n$ sont ses générateurs. Alors pour ces espaces on a les minorations suivantes (voir aussi la proposition I.7.21), qui résultent des corollaires I.3.12 et I.6.5.

Proposition I.7.1 ([**28**, Example 3.3.1.3], [**48**, Theorem 7])**.**

(i) Il existe une constante positive C_1 telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a

$$\alpha(\boldsymbol{M}_n, \| \, \|_k) \geq d_{S\mathcal{K}}(S_1^n) \geq C_1 \, n.$$

(ii) Pour tout $n \geq 2$ on a

$$\alpha(\ell_\infty^n, \| \, \|_k) \geq d_{S\mathcal{K}}(E_1^n) \geq \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Remarque I.7.2. Notons que l'on peut interpréter ce nombre de la manière suivante :

$$\alpha(E_1^n, \| \, \|_k) = \sup \left\{ \frac{\left\| \sum_{i=1}^n a_i \otimes U_i \right\|}{\left\| \sum_{i=1}^n a_i \otimes U_i^{(k)} \right\|} \mid a_i \in B(H) \right\},$$

où $U_i^{(k)}$ sont les images des générateurs du groupe libre $\mathbf{F}_n$ par la représentation $\pi_u^{(k)} = \oplus\{ \pi \mid \pi : \mathbf{F}_n \to \boldsymbol{M}_k \text{ unitaire} \}$, puisque $(E_1^n, \| \, \|_k)$ étant le dual de $(\ell_\infty^n, \| \, \|_k)$ est la structure MAX pour tout k et dans ce cas le théorème de Russo-Dye permet d'écrire la formule (I.3.1) de manière

$$\left\| \sum a_i \otimes e_i \right\|_{B(H) \otimes_{\min} MIN(E_1^n, \| \, \|_k)} = \sup \left\{ \left\| \sum a_i \otimes u_i \right\| \mid u_i \in \boldsymbol{M}_k \text{ unitaires} \right\}.$$

V. Paulsen [**41**, Corollary 3.4] a estimé $\alpha(\ell_\infty^n) = \alpha(\ell_1^n) \leq \sqrt{n-1}$ et on a donc $\alpha(\ell_\infty^n, \| \, \|_k) \approx \sqrt{n}$ indépendemment de k.

Plus généralement, la proposition suivante, corollaire simple de la proposition I.6.10 et du corollaire I.3.12, restreint la classe des espaces d'opérateurs $(X, \{\| \, \|_k\})$ dont la structure MIN et la structure MAX coïncident pour un certain entier k.

Proposition I.7.3. *Soit $(X, \{\| \, \|_k\})$ un espace d'opérateurs pour lequel $\alpha(X, \| \, \|_n) = 1$ pour un certain n. Alors $d_{S\mathcal{K}}(X) = d_{S\mathcal{K}}(X^*) = 1$.*

Remarque I.7.4. Les seuls exemples connus avec cette propriété sont $\ell_1^2, \ell_\infty^2, R_n, C_n, R$ et C. En effet, on a $\alpha(\ell_\infty^2) = \alpha(\ell_1^2) = 1$ [**40**] et $\alpha(R_n, \| \, \|_n) = \alpha(C_n, \| \, \|_n) = 1$, puisque d'un coté $R_n = MIN(R_n, \| \, \|_n)$ (cf. la proposition I.3.4), et d'un autre coté, R_n étant le dual de $C_n = MIN(C_n, \| \, \|_n)$, on a aussi $R_n = MAX(R_n, \| \, \|_n)$ (cf. corollaire I.3.10) ; voir (I.7.6) pour une estimation de $\alpha(R_n, \| \, \|_k)$.

Remarque I.7.5. Il est bien connu qu'un espace de Banach X dont tous les sous-espaces de dimension 2 sont isométriquement hilbertiens est lui-même hilbertien. La remarque I.6.7 soulève la question de savoir si les espaces d'opérateurs hilbertiens homogènes ont une propriété analogue. Dans [**61**], C. Zhang a montré que ce n'est pas le cas en exhibant pour tout entier n des exemples d'espaces d'opérateurs hilbertiens H',

H'' homogènes non-isomorphes qui ont les mêmes sous-espaces de dimension n. Le fait que la structure d'espace d'opérateurs sur R_n est déterminée par la M_n-structure fournit un autre exemple. En effet, $MIN(R, \| \, \|_n)$ et $MAX(R, \| \, \|_n)$ coïncident sur leurs sous-espaces de dimension inférieure à n, mais ils ne sont pas complètement isomorphes, car $MAX(R, \| \, \|_n)$ n'est pas exact (cf. proposition I.7.21).

I.7.2. L'espace hilbertien M_nH. On note $M_nH(I)$ le M_n-espace sous-jacent à l'espace d'opérateurs $OH(I)$ de [**50**]. Rappelons-en quelques propriétés.

Proposition I.7.6 ([**50**, Theorem 1.1]). *Pour tout ensemble d'indices I il y a un M_n-espace unique $M_nH(I)$ qui vérifie les propriétés suivantes.*

(i) $M_nH(I) = \ell_2(I)$ isométriquement.

(ii) L'identification canonique entre $M_nH(I)$ et $\overline{M_nH(I)^*}$ est une n-isométrie.

En plus, si l'on note $\{\theta_i\}$ la base canonique de $\ell_2(I)$, la n-norme sur $M_nH(I)$ est donnée par

$$\Big\|\sum \alpha_i \otimes \theta_i\Big\|_{M_n(M_nH(I))} = \Big\|\sum \alpha_i \otimes \overline{\alpha_i}\Big\|^{1/2}_{\boldsymbol{M_n} \otimes \overline{\boldsymbol{M_n}}}. \tag{I.7.1}$$

On notera $M_nH = M_nH(\mathbf{N})$ et $M_nH_m = M_nH(\{1, \ldots, m\})$.

Remarque I.7.7. La formule (I.7.1) pour la n-norme sur $M_nH(I)$ entraîne que

$$\Big\|\sum \alpha_i \otimes \theta_i\Big\|_{M_n(M_nH(I))} = \Big\|\sum \overline{\alpha_i} \otimes \theta_i\Big\|_{M_n(M_nH(I))} = \Big\|\sum \alpha_i \otimes \overline{\theta_i}\Big\|_{M_n(\overline{M_nH(I)})}.$$

Proposition I.7.8 ([**50**, Proposition 1.4]). *Soit X un M_n-espace et soit $u : M_nH(I) \to X$ une application n-bornée avec $u(\theta_i) = x_i$. Alors*

$$\|u\|_n = \sup_{J \subseteq I \text{ fini}} \sup \left\{ \Big\|\sum_{i \in J} \langle f, x_i \rangle \otimes \overline{\langle f, x_i \rangle}\Big\|^{1/2}_{\boldsymbol{M_n} \otimes \overline{\boldsymbol{M_n}}} \mid f \in M_n(X^*), \|f\|_n^* \le 1 \right\}$$

Démonstration. Avec l'identification anti-isométrique $M_nH(I)^* = \overline{M_nH(I)}$ on a $u(h) = \sum \langle \overline{\theta_i}, h \rangle x_i$. Supposons d'abord que u soit de rang fini, alors les remarques I.1.15 et I.7.7 entraînent

$$\begin{aligned} \|u\|_n &= \sup \left\{ \Big\|\sum \overline{\theta_i} \otimes \langle f, x_i \rangle\Big\|_{M_n(\overline{M_nH(I)}^*)} \mid \|f\|_n^* \le 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \Big\|\sum \langle f, x_i \rangle \otimes \overline{\langle f, x_i \rangle}\Big\|^{1/2}_{\boldsymbol{M_n} \otimes \overline{\boldsymbol{M_n}}} \mid \|f\|_n^* \le 1 \right\}. \end{aligned}$$

Dans le cas général, on note que $\|u\|_n = \sup\{ \|uP_J\|_n \mid J \subseteq I \text{ fini}\}$, où P_J désigne la projection orthogonale de $\ell_2(I)$ sur $\ell_2(J)$. □

Proposition I.7.9 ([**50**, Corollary 2.4, Proposition 7.2]). *Soit X un M_n-espace avec un plongement borné injectif $v : M_nH \to X$ à image dense et tel que l'application $v\overline{v^*} : \overline{X^*} \to X$ est injective et à image dense aussi. Alors $(\overline{X^*}, X)$ est un couple compatible inclus dans X et on a*

$$M_nH = (\overline{X^*}, X)_{\frac{1}{2}}$$

n-isométriquement. Soit H_n un espace d'opérateurs homogène isométrique à ℓ_2^n. Alors on a

$$d_k(H_n, \overline{H_n^*}) = d_k(H_n, OH_n)^2. \tag{I.7.2}$$

Le corollaire I.3.10 et [**50**, Corollary 2.5] impliquent immédiatement

Corollaire I.7.10. *Pour tout ensemble d'indices I et pour tout entier positif n on a*

$$\big(MIN(M_nH(I)), MAX(M_nH(I))\big)_{\frac{1}{2}} = OH(I)$$

n-isométriquement.

I.7.3. Comparaisons. Dans ce paragraphe on va donner quelques estimations des k-distances entre les espaces hilbertiens «classiques». Notons que par la k-homogénéité des structures MIN et MAX la k-distance $d_k(X,Y)$ entre les M_n-espaces X et Y n'est rien d'autre que la distance complètement bornée $d_{cb}\big(MIN(X,\|\ \|_k), MIN(Y,\|\ \|_k)\big) = d_{cb}\big(MAX(X,\|\ \|_k), MAX(Y,\|\ \|_k)\big)$. Dans ce qui suit on va constamment (et sans référence) utiliser la proposition I.6.8.

Proposition I.7.11.

(I.7.3a) $\qquad d_k(R_n, C_n) = \min\{k,n\} \qquad d_k(R,C) = k$

(I.7.3b) $\qquad d_k(R_n, OH_n) = \sqrt{\min\{k,n\}} \qquad d_k(R,OH) = \sqrt{k}$

(I.7.3c) $\qquad d_k(C_n, OH_n) = \sqrt{\min\{k,n\}} \qquad d_k(C,OH) = \sqrt{k}$

Démonstration. Il est bien connu que $d_{cb}(R_k, C_k) = d_k(R_k, C_k) = k$ et on a donc pour $k \le n$ la minoration $d_k(R,C) \ge d_k(R_n,C_n) \ge d_k(R_k,C_k) = k$. Pour montrer l'inégalité inverse, notons que

$$\|id : R \to C\|_k = \sup\left\{ \left\|\sum \alpha_i^*\alpha_i\right\|^{1/2} \mid \alpha_i \in \boldsymbol{M}_k, \left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|^{1/2} \le 1 \right\}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\left\|\sum \alpha_i^*\alpha_i\right\|^{1/2} &\le \left[\mathrm{tr}\left(\sum \alpha_i^*\alpha_i\right)\right]^{1/2}\\ &= \left[\mathrm{tr}\left(\sum \alpha_i\alpha_i^*\right)\right]^{1/2}\\ &\le \left(k\ \left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|\right)^{1/2}\end{aligned}$$

et on a donc $d_k(R,C) \le \|id : R \to C\|_k^2 \le k$, d'où (I.7.3a). Les formules (I.7.3b) et (I.7.3c) en résultent comme conséquence de la proposition I.7.9. □

Proposition I.7.12.

$$d_k(OH_n, R_n \cap C_n) = \|id : OH_n \to R_n \cap C_n\|_k = (\min\{k,n\})^{1/4}$$

Démonstration. La formule pour la dualité (I.1.3) implique que $\|id : R_n \cap C_n \to OH_n\|_k = 1$. Pour estimer

$$\|OH_n \to R_n \cap C_n\|_k = \sup\ \max\left\{\left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|_{\boldsymbol{M}_k}^{1/2}, \left\|\sum \alpha_i^*\alpha_i\right\|_{\boldsymbol{M}_k}^{1/2}\right\}$$

où le supremum porte sur les matrices $\alpha_i \in \boldsymbol{M}_k$ dont la norme OH vérifie

$$\left\|\sum \alpha_i \otimes \overline{\alpha_i}\right\|_{\boldsymbol{M}_k \otimes \overline{\boldsymbol{M}_k}}^{1/2} \le 1,$$

on fait appel à la formule (I.1.3) encore une fois :

$$\left\|\sum \alpha_i\alpha_i^*\right\|^{1/2} = \sup\left\{ \left\|\sum \alpha_i \otimes \overline{\beta_i}\right\| \mid \left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\|^{1/2} \le 1 \right\};$$

ensuite en appliquant l'inégalité (I.1.3) on obtient par le même argument que dans la démonstration précédente

$$\begin{aligned}\left\|\sum \alpha_i\otimes\overline{\beta_i}\right\| &\le \left\|\sum \alpha_i\otimes\overline{\alpha_i}\right\|^{1/2} \left\|\sum \beta_i\otimes\overline{\beta_i}\right\|^{1/2}\\ &\le \left\|\sum \alpha_i\otimes\overline{\alpha_i}\right\|^{1/2} \left\|\sum \beta_i\beta_i^*\right\|^{1/4} \left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\|^{1/4}\\ &\le \left\|\sum \alpha_i\otimes\overline{\alpha_i}\right\|^{1/2} \sqrt[4]{k} \left\|\sum \beta_i^*\beta_i\right\|^{1/2}\end{aligned}$$

et de façon analogue on montre que $\|\sum a_i^*a_i\|^{1/2} \le \sqrt[4]{k}$, d'où la conclusion. □

Proposition I.7.13.

(I.7.4a) $$d_k\big(MIN(\ell_2^n), MAX(\ell_2^n)\big) = \|Id : MIN(\ell_2^n) \to MAX(\ell_2^n)\|_k \approx \min\{k,n\}$$

(I.7.4b) $$d_k\big(MIN(\ell_2^n), OH_n\big) = d_k\big(MAX(\ell_2^n), OH_n\big) \approx \sqrt{\min\{k,n\}}$$

Démonstration. Notons $\tau_n = \frac{1}{n}\mathrm{tr}$ la trace normalisée de $\boldsymbol{M}_n$. Un résultat de M. Junge [**28**, Lemma 4.3.1] dit qu'il existe une constante universelle C telle que pour tout entier n il existe des matrices $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \in \boldsymbol{M}_n$ orthonormales dans $L^2(\boldsymbol{M}_n, \tau_n)$ avec la propriété supplémentaire que pour toute suite de scalaires λ_i on a aussi en norme d'opérateurs

$$\left\|\sum \lambda_i\,\delta_i\right\| \le C\,\left(\sum |\lambda_i|^2\right)^{1/2}.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}\|id : MIN(\ell_2^n) \to OH_n\|_n &= \sup\left\{ \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i\otimes\overline{\alpha_i}\right\|^{1/2}_{\boldsymbol{M}_n\otimes\overline{\boldsymbol{M}_n}} \;\middle|\; \alpha_i \in \boldsymbol{M}_n, \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i\,\alpha_i\right\|_{\boldsymbol{M}_n} \le \left(\sum |\lambda_i|^2\right)^{1/2} \text{ pour } \lambda_i \in \mathbf{C}\right\}\\ &\ge \frac{1}{C}\left\|\sum_{i=1}^n \delta_i\otimes\overline{\delta_i}\right\|^{1/2}_{\boldsymbol{M}_n\otimes\overline{\boldsymbol{M}_n}}\\ &\ge \frac{1}{C}\left(\sum_{i=1}^n \tau_n(\delta_i\delta_i^*)\right)^{1/2}\\ &= \frac{\sqrt{n}}{C}.\end{aligned}$$

On a donc par la proposition I.7.9 et le lemme I.6.1 pour $k \le n$

$$\frac{k}{C^2} \le \|MIN(\ell_2^k) \to MAX(\ell_2^k)\|_k \le \|MIN(\ell_2^n) \to MAX(\ell_2^n)\|_k \le k$$

d'où (I.7.4a) ; pour l'autre formule (I.7.4b) il suffit de rappeler (I.7.2).

□

Dans le reste de ce paragraphe on va estimer le paramètre α de Paulsen pour les M_n-espaces hilbertiens homogènes OH_n, R_n, C_n, $R_n \cap C_n$, $MIN(\ell_2^n)$ et $MAX(\ell_2^n)$.

Lemme I.7.14. *Soit e_i la base canonique de ℓ_2^n et soit $(H_n, \|\ \|_k)$ une M_n-structure homogène sur ℓ_2^n. Alors on a l'inégalité*

$$\alpha(H_n, \|\ \|_k) \le \left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil \left\|\sum_{i=1}^k e_{1i}\otimes e_i\right\|_{M_k(H_n)} \left\|\sum_{i=1}^k e_{i1}\otimes e_i\right\|_{M_k(H_n^*)}$$

où $\lceil t\rceil$ est le plus petit nombre entier supérieur au nombre réel positif t.

DÉMONSTRATION. On applique la proposition I.3.13 au couple (H_n, H_n^*) et on obtient

$$\alpha(H_n, \|\ \|_k) = \sup \left\|\sum a_i \otimes b_i\right\|$$

où le supremum porte sur les n-uplets $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ dans $B(H)$ qui satisfont

$$\left\|\sum a_i \otimes \alpha_i\right\| \le \left\|\sum \alpha_i \otimes e_i\right\|_{M_k(H_n)}^{1/2} \quad \text{et} \quad \left\|\sum b_i \otimes \beta_i\right\| \le \left\|\sum \beta_i \otimes e_i\right\|_{M_k(H_n^*)}^{1/2} \tag{I.7.5}$$

pour toutes n-uplets $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ dans $\boldsymbol{M}_k$. Alors en rajoutant $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{\lceil \frac{n}{k}\rceil} = 0$ on a

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right\| &\le \sum_{j=1}^{\lceil \frac{n}{k}\rceil} \left\|\sum_{i=1}^{k} a_{jk+i} \otimes b_{jk+i}\right\| \\
&\le \sum_{j=1}^{\lceil \frac{n}{k}\rceil} \left\|\sum_{i=1}^{k} a_{jk+i} \otimes e_{i1}\right\| \left\|\sum_{i=1}^{k} b_{jk+i} \otimes e_{1i}\right\| && \text{par (I.1.3)} \\
&\le \left\lceil \frac{n}{k}\right\rceil \left\|\sum e_{i1} \otimes e_i\right\|_{M_k(H_n)}^{1/2} \left\|\sum e_{1i} \otimes e_i\right\|_{M_k(H_n^*)}^{1/2} && \text{par (I.7.5)}
\end{aligned}$$

puisque les e_{ij} qui apparaissent sont dans $\boldsymbol{M}_k$. □

Proposition I.7.15. *Pour tout $k \le n$*

$$\alpha(R_n, \|\ \|_k) = \alpha(C_n, \|\ \|_k) \le \left\lceil \frac{n}{k}\right\rceil \tag{I.7.6}$$

$$\alpha(R_n + C_n, \|\ \|_k) = \alpha(R_n \cap C_n, \|\ \|_k) \le \min\left\{ \left\lceil \frac{n}{k}\right\rceil \sqrt{k}, \sqrt{n} \right\} \tag{I.7.7}$$

$$\alpha(OH_n, \|\ \|_k) = \delta_k(OH_n)^2 \le \min\left\{ \left\lceil \frac{n}{k}\right\rceil \sqrt{k}, \sqrt{n} \right\} \tag{I.7.8}$$

$$\alpha(MIN(\ell_2^n, \|\ \|_k) = \alpha(MAX(\ell_2^n, \|\ \|_k) \le \min\left\{ \left\lceil \frac{n}{k}\right\rceil \sqrt{k}, \sqrt{n} \right\} \tag{I.7.9}$$

Remarque I.7.16. En vue des inégalités

$$\begin{aligned}
\delta_n(R_n) = \delta_n(C_n) &= 1 && \text{cf. remarque I.7.4} \\
\delta_k(OH_n) \ge d_{S\mathcal{K}}(OH_n) &\ge \sqrt{\frac{n}{2\sqrt{n-1}}} \ge \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2}} && \text{[}\mathbf{48}\text{, Corollary 10]} \\
d_{S\mathcal{K}}\big(MAX(\ell_2^n)\big) &\ge \frac{\sqrt{n}}{4} && \text{[}\mathbf{29}\text{, Theorem 3.2]}
\end{aligned}$$

les estimations (I.7.6), (I.7.8) et (I.7.9) sont optimales pour $k \ge n$.

DÉMONSTRATION. Ces inégalités résultent du lemme précédent et des calculs suivants. Pour (I.7.6) on observe que

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} e_{1i} \otimes e_i\right\|_{M_k(C_n)} = \left\|\sum_{i=1}^{k} e_{i1} \otimes e_i\right\|_{M_k(R_n)} = 1.$$

Pour voir (I.7.7), on note que

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} e_{1i} \otimes e_i\right\|_{M_k(R_n \cap C_n)} = \sqrt{k} \quad \text{et} \quad \left\|\sum_{i=1}^{k} e_{i1} \otimes e_i\right\|_{M_k(R_n + C_n)} = 1;$$

l'inégalité pour l'espace d'opérateurs de Hilbert vient de

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} e_{1i}\otimes e_i\right\|_{M_k(OH_n)} = \left\|\sum_{i=1}^{k} e_{i1}\otimes e_i\right\|_{M_k(OH_n)} = k^{1/4}$$

Enfin, pour MIN et MAX on a d'une part

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} e_{i1}\otimes e_i\right\|_{M_k(MIN(\ell_2^n))} = 1$$

et d'autre part par dualité

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} e_{1i}\otimes e_i\right\|_{M_k(MAX(\ell_2^n))} = \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{k} e_{1i}\otimes a_i\right\| \;\middle|\; \left\|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, a_i\right\| \le \left(\sum_{i=1}^{k}|\lambda_i|^2\right)^{1/2}\right\}$$

que l'on peut estimer comme suit.

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} e_{1i}\otimes a_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{k} a_i a_i^*\right\|^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^{k}\|a_i\|^2\right)^{1/2} \le \sqrt{k}$$

ce qui achève la démonstration. □

Proposition I.7.17 ([**28**, Lemma 3.3.3.1])**.**

$$d_k\big(MIN(\ell_2^n), R_n\cap C_n\big) = \big\|id : MIN(\ell_2^n)\to R_n\cap C_n\big\|_k = \sqrt{\min\{k,n\}}$$

et par conséquent, pour n'importe quel espace d'opérateurs X et $u : X\to R_n\cap C_n$ on a

$$\|u\|_k \le \sqrt{\min\{k,n\}}\,\|u\| \tag{I.7.10}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\big\|id : MIN(\ell_2^n)\to C_n\big\|_k \le \sqrt{k}$ pour $k\le n$, l'autre inégalité en résulte par symétrie. Puis on déduit (I.7.10) de la proposition I.3.4 en utilisant la factorisation $X\to MIN(\ell_2^n)\to C_n\cap R_n$. Soit $\sum a_i\otimes e_i$ dans la boule unité de $M_k(MIN(\ell_2^n))$, i.e. tel que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\right\|_{M_k} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\right)^{1/2} \tag{I.7.11}$$

pour toute suite $\lambda_i\in\mathbf{C}$. Notons que $\|\sum a_i\otimes e_i\|_{M_k(C_n)} = \sup\|\sum a_i\xi_i\|$, où le sup porte sur les suites $\xi_i\in\mathbf{C}^k$ telles que $\sum\|\xi_i\|_{\ell_2}^2\le 1$. Soient ε_i des variables aléatoires i.i.d. de Bernoulli, c'est-à-dire $P(\varepsilon_i=+1)=P(\varepsilon_i=-1)=\frac{1}{2}$. Alors pour $\xi_i=(\xi_i^j)\in\mathbf{C}^k$ fixe on a

$$\begin{aligned}
\left\|\sum a_i\xi_i\right\|_{\ell_2}^2 &= \left\|\sum_{i,j} a_i\xi_i^j e_j\right\|_{\ell_2}^2 = \left\|\mathbf{E}\sum_{i,j,j'} a_i\xi_i^j\varepsilon_j e_{j'}\varepsilon_{j'}\right\|^2 \\
&\le \mathbf{E}\left\|\sum_{i,j} a_i\xi_i^j\varepsilon_j\sum_{j'}\varepsilon_{j'}e_{j'}\right\|_{\ell_2}^2 && \text{par convexité}\\
&\le k\,\mathbf{E}\sum_i\left|\sum_j \xi_i^j\varepsilon_j\right|^2 && \text{par (I.7.11)}\\
&= k\sum_{i,j}|\xi_i^j|^2 = k\sum\|\xi_i\|_{\ell_2}^2
\end{aligned}$$

□

Pour la suite rappelons quelques notations.

Notation I.7.18 ([**29**],[**46**])**.** Soient X et Y des espaces de Banach et soit $u : X \to Y$ un opérateur linéaire. Alors u est dit 2-sommant s'il existe une constante C telle que pour toute suite finie $x_i \in X$ on a

$$\sum \|u(x_i)\|_Y^2 \leq C^2 \sup \left\{ \sum |\xi(x_i)|^2 \,\middle|\, \xi \in X^*, \|\xi\| \leq 1 \right\}$$

et on note $\pi_2(u)$ la plus petite constante. Si de plus X est muni d'une structure d'espace d'opérateurs, on notera pour une suite $x_i \in B(H)$

$$RC\big((x_i)\big) = \max \left\{ \left\|\sum x_i x_i^*\right\|, \left\|\sum x_i^* x_i\right\| \right\}$$

et $\pi_{2,RC}(u)$ sera la plus petite constante C pour laquelle on a

$$\sum \|u(x_i)\|_Y^2 \leq C^2\, RC\big((x_i)\big).$$

Il est facile à voir que $\pi_{2,RC}(u) \leq \pi_2(u)$ avec égalité quand X est muni de la structure $MIN(X)$. Pour la structure $MIN(X, \|\ \|_k)$ on a l'estimation suivante.

Corollaire I.7.19. *Soient $(X, \{\|\ \|_k\})$ et Y des espaces d'opérateurs et soit $u : MIN(X, \|\ \|_k) \to Y$ une application linéaire $(2, RC)$-sommante. Alors u est 2-sommante avec*

$$\pi_2(u) \leq \sqrt{k}\, \pi_{2,RC}(u).$$

Démonstration. Notons d'abord que d'après (I.3.1) pour $x_i \in X$ on a la formule

$$RC\big((x_i)\big) = \sup \left\{ RC(\langle f, x_i\rangle) \mid f \in M_k(X^*), \|f\|_k^* \leq 1 \right\}$$

qui peut être estimée comme suit. Toute suite $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans X définit une application

$$\begin{aligned} T_{\underline{x}} : X^* &\to R_k \cap C_k \\ f &\mapsto \sum \langle f, x_i\rangle\, \delta_i \end{aligned}$$

où $\delta_i = e_{1i} \oplus e_{i1}$ est la base canonique de $R_k \cap C_k$. On peut alors estimer

$$\begin{aligned} RC\big((\langle f, x_i\rangle)\big) &= \left\| T_{\underline{x}k}(f) \right\|^2_{M_k(R_n \cap C_n)} \\ &\leq k\, \|u\|^2\, (\|f\|_k^*)^2 \end{aligned}$$

en appliquant la proposition I.7.17 et l'identité

$$\|u\|^2 = \sup \left\{ \sum |\langle f, x_i\rangle|^2 \,\middle|\, f \in X^*, \|f\| \leq 1 \right\}$$

achève la démonstration. □

On aura besoin du résultat suivant.

Proposition I.7.20 ([**29**, Theorem 1.4])**.** *Soient X, Y des espaces d'opérateurs exacts et soit $u : X \to Y^*$ complètement bornée. Alors u est $(2, RC)$-sommant avec*

$$\pi_{2,RC}(u) \leq 4\, d_{S\mathcal{K}}(X)\, d_{S\mathcal{K}}(Y)\, \|u\|_{cb}$$

Avec ces outils on est prêt à montrer une généralisation de [**29**, Theorem 3.2]. Pour ceci rappelons la constante

$$d_{QS\mathcal{K}}(X) = \inf d_{cb}(X, Y)$$

où le inf porte sur tout les quotients Y des sous-espaces des opérateurs compacts $\mathcal{K}$. À part l'estimation $d_{QS\mathcal{K}}(X) \leq d_{S\mathcal{K}}(X) \leq \sqrt{\dim X}$ (cf. [**50**, Theorem 9.6]) on a la minoration suivante pour les espaces MAX.

Proposition I.7.21. *Soit $(X, \| \|_k)$ un M_n-espace de dimension n, alors*

$$d_{QS\mathcal{K}}\big(MAX(X, \| \|_k)\big) \geq \frac{\sqrt{n}}{4\sqrt{k}}.$$

Par conséquent, un espace d'opérateurs X de dimension n satisfait

$$\alpha(X, \| \|_k) \geq \frac{\sqrt{n}}{4\sqrt{k}}.$$

DÉMONSTRATION. On peut adapter la démonstration de [**29**]. On utilise le fait que $\pi_2(I_{X^*}) = \sqrt{n}$ (cf. e.g. [**46**, Theorem 1.11]) et que l'on a donc $\pi_{2,RC}(I_{X^*}) \geq \sqrt{\frac{n}{k}}$ par le corollaire I.7.19, puisque X^* a la structure MIN.
Soit maintenant $v : X_1/X_2 \to MAX(X, \| \|_k)$ un isomorphisme avec $X_2 \subseteq X_1 \subseteq \mathcal{K}$. Alors on a un plongement complètement isométrique $J : \big(X_1/X_2\big)^* = X_2^{\perp} \subseteq X_1^*$ et on peut appliquer le corollaire I.7.20 à l'opérateur

$$Jv^* : MIN(X^*, \| \|_k) \to X_2^{\perp} \to X_1^*$$

pour obtenir

$$\pi_{2,RC}(v^*) = \pi_{2,RC}(Jv^*) \leq 4\, \|Jv^*\|_{cb} \leq 4\, \|v^*\|_{cb} = 4\, \|v\|_{cb}.$$

Ceci implique

$$\sqrt{\tfrac{n}{k}} \leq \pi_{2,RC}(I_{X^*}) \leq \|{v^*}^{-1}\|\, \pi_{2,RC}(v^*) \leq 4\, \|v^{-1}\|\, \|v\|_{cb}$$

d'où la conclusion. $\square$

Remarque I.7.22. L'exemple $R_n = MAX(R_n, \| \|_n) = MIN(R_n, \| \|_n)$ (cf. (I.7.6)) montre qu'à une constante près cette borne est optimale.