32. Es sei f eine Abbildung der Menge M in die Menge N und $A, B \subseteq M$. Wir definieren das Bild von Teilmengen wie folgt
$$f(A) = \{y \in N : \exists x \in A : f(x) = y\}$$
Zeigen Sie
    - $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
    - $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
      Geben Sie ein Beispiel für den Fall $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

33. Geben Sie für die Funktion f den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ an. Zeigen Sie, dass f monoton ist. Zeigen Sie ausserdem, dass f beschränkt ist und geben Sie die Schranken an.
$$f(x) = \sqrt{x - \sqrt{1 - x^2}}.$$

34. Sei G_n die Folge im Beispiel 12 b) vom Übungsblatt 3. Sei a die postive Nullstelle der Gleichung $a^2 + a - 1 = 0$. Zeigen Sie dass
$$|G_{n+1} - a| \leq a|G_n - a|$$
für alle $n \geq 1$ gilt, und folgern Sie, dass $\lim_{n\to\infty}(G_n) = a$ ist.

35. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Belegen Sie Ihre Antworten!
    (a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reellwertige Folge und es gelte folgende Bedingung:
    $\exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0$ es gibt unendlich viele Folgenglieder a_n, sodass $a_n \in U_\varepsilon(a)$.
    - Dann konvergiert a_n gegen a.
    - Es ist nicht klar, ob a_n konvergiert, aber falls doch, so muss a der Grenzwert sein.
    - $\liminf_{n\to\infty} a_n$ existiert.
    - $\limsup_{n\to\infty} a_n$ existiert und $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq a_m \ \forall m \in \mathbb{N}$.
    - $\limsup_{n\to\infty} a_n$ existiert und $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq a$.

    (b) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexwertige Folge mit Grenzwert $b \in \mathbb{C}$.
    - Wenn $\mathrm{Im}(b_n) = 0 \ \forall n$, so ist auch $\mathrm{Im}(b) = 0$.
    - Wenn $\mathrm{Im}(b_n) > 5 \ \forall n$, so ist auch $\mathrm{Im}(b) > 5$.
    - $\liminf_{n\to\infty} b_n$ existiert.
    - Die Folgen $c_n := n$ und $d_n := -n$ haben in $\bar{\mathbb{C}}$ dasselbe Konvergenzverhalten.
    - Die Summe von zwei bestimmt divergenten Folgen in $\bar{\mathbb{C}}$ ist bestimmt divergent.

36. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Kovergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:
    (a)
$$\left(\frac{(n+1)(n^2+1)}{(2n+1)(3n^2+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
    (b)
$$\left(\frac{1}{n^2} + (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$