

Kusterlösung Blatt 1

1.	A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \vee \neg B) = \neg A \wedge B$	$A \rightarrow$	$\neg A \vee \neg B$
	w	w	f	f	f	f	f	f
	w	f	f	w	w	f	w	w
	f	w	w	f	f	w	w	w
	f	f	w	w	f	f	w	w

2. $A: X \rightarrow Y$ heißt eindeutig ($\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in X: x_1 \neq x_2 \xrightarrow{\quad} A(x_1) \neq A(x_2)$)

Negation: $\exists x_1, x_2 \in X: x_1 \neq x_2 \wedge A(x_1) = A(x_2)$

3. z.z.: $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$
lhs rhs

Beweis durch Mengeneinklusion:

($\subseteq$) sei $x \in \text{lhs}$, zeige $x \in \text{rhs}$

folgende 3 Fälle:

- a) $x \in A \cap B \Rightarrow$
 - $x \in A \cup B$, da x in beiden Mengen
 - $x \in B \cup C$, da x in $B \in B \cup C$
 - $x \in C \cup A$, da x in $A \in C \cup A$
- b) $x \in B \cap C \Rightarrow$
 - $x \in A \cup B$, da x in $B \in A \cup B$
 - $x \in B \cup C$, da x in beiden
 - $x \in C \cup A$, da x in C
- c) $x \in C \cap A \Rightarrow$
 - $x \in A \cup B$, da x in $A \in A \cup B$
 - $x \in B \cup C$, da x in $C \in B \cup C$
 - $x \in C \cup A$, da x in beiden

Wir haben also gezeigt: egal in welchem Schnitt x auf der linken Seite enthalten ist, es ist immer in den Vereinigungen auf der rechten Seite enthalten! Damit auch im Schnitt.

Da x beliebig aus der linken Menge (!) genommen wurde, erhalten wir ($\subseteq$). ✓

($\supseteq$) sei $y \in \text{rhs}$, zeige $y \in \text{lhs}$.

Wir beobachten: wenn $y \in \text{rhs}$, dann muss y zumindest (!) im Schnitt von zwei Mengen enthalten sein.

Denn: Ang. y ist nur in einer Menge (bspw. A) enthalten, so ist es sicher nicht in B und nicht in C , also auch nicht in $B \cup C$.

Damit ergibt sich die Fallunterscheidung: $y \in A \cap B, y \in A \cap C, y \in B \cap C$

in allen Fällen erhalten wir gerade einen Schnitt, der auf der linken Seite vorkommt.

4. $f: M \rightarrow N$, $A, B \subseteq M$ und $C, D \subseteq N$, zeige durch Mengeneinklusionen:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

($\subseteq$) sei ~~$x \in A$~~ $y \in f(A \cup B) \stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} \exists x \in A \cup B: y = f(x)$.

Also: $x \in A \vee x \in B \Rightarrow f(x) \in f(A) \vee f(x) \in f(B)$
 $= f(x) \in f(A) \cup f(B)$.

($\supseteq$) sei $y \in f(A) \cup f(B) \stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} \exists x \in A \vee \exists x \in B: f(x) = y$
 $\Rightarrow x \in A \cup B$ (denn $A \subseteq A \cup B$ bzw. $B \subseteq A \cup B$)
 $\Rightarrow f(x) \in f(A \cup B)$ und $f(x) = y$.

b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

sei $y \in f(A \cap B) \stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} x \in A \cap B: f(x) = y \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow f(x) \in f(A) \wedge f(x) \in f(B)$
 $\Rightarrow f(x) \in f(A) \cap f(B)$

Warum gilt nicht Gleichheit: Betrachte $f(x) = x^2$, $A = (-\infty, -1]$, $B = [1, \infty)$

Dann ist $A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A \cap B) = \emptyset$. Benötigt wird die Eineindeutigkeit

Aber: $1 \in f(A) \cap f(B)$.

c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

($\subseteq$) sei $x \in f^{-1}(C \cup D) \stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} f(x) \in C \cup D \Rightarrow f(x) \in C \vee f(x) \in D \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \vee x \in f^{-1}(D)$

($\supseteq$) sei $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \vee x \in f^{-1}(D) \stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} f(x) \in C \vee f(x) \in D$
 $\Rightarrow f(x) \in C \cup D$, da $C \subseteq C \cup D$
 $\stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} x \in f^{-1}(C \cup D)$

d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

($\subseteq$) sei $x \in f^{-1}(C \cap D) \stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} f(x) \in C \cap D \Rightarrow f(x) \in C \wedge f(x) \in D \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \in f^{-1}(D)$
 $= x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

($\supseteq$) sei $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \wedge x \in f^{-1}(D) \stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} f(x) \in C \wedge f(x) \in D$
 $\Rightarrow f(x) \in C \cap D \stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} x \in f^{-1}(C \cap D)$.

5. Zeige: ...

5. Zeige: es existiert keine surjektive Abb. $f: A \rightarrow P(A)$, wobei $A \neq \emptyset$ und $P(A)$... Menge aller Teilmengen von A .

Beweis

Surjektiv heißt: $\forall M \in P(A): \exists a \in A: f(a) = M$. Es reicht also zumindest eine Menge(!) M zu finden, zu der kein solches a existiert.

Definiere $M := \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$, dann ist $M \in P(A)$, denn M ist eine Menge und $\forall m \in M: m \in A$. Also eine Teilmenge von A .

Angenommen $\exists a \in A: f(a) = M$. Dann muss $a \in M \vee a \in A \setminus M$, denn $a \in A = M \cup A \setminus M$.

Fall 1: $a \in M$ ^{Def. von M} $\Rightarrow a \notin f(a) = M$ ^{Annahme} $\Rightarrow a \notin M$. Widerspruch, da gezeigt wurde $a \in M \Rightarrow a \notin M$.

Fall 2: $a \notin M$ ^{Def. von M} $\Rightarrow a \in f(a) = M \Rightarrow a \in M$. Widerspruch!

Wir haben also gezeigt, dass falls ein $a \in A$ existiert, sodass $f(a) = M$. Dann erhalten wir einen Widerspruch.

Also: $\nexists a \in A: f(a) = M$.

Das ist gerade die Negation von Surjektivität, also kann f nicht surjektiv sein.