

Aufgabe 6

Zeigen Sie für beliebige endliche Mengen:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Leiten Sie daraus eine entsprechende Formel für $|A \cup B \cup C|$ her.

Lösung:

Für endliche Mengen D, E mit $D \cap E = \emptyset$ gilt $|D \cup E| = |D| + |E|$ damit erhält man:

$$|A \cup B| = |A \cup (B \setminus (A \cap B))| = |A| + |B \setminus (A \cap B)|$$

Da nun $A \cap B \subseteq B$ gilt $B = (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B))$ und $(A \cap B) \cap (B \setminus (A \cap B)) = \emptyset$ und damit auch:

$$|B| = |A \cap B| + |B \setminus (A \cap B)| \implies |B \setminus (A \cap B)| = |B| - |A \cap B|$$

Somit erhält man:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Die Anzahl der Elemente von $|A \cup B \cup C|$ kann man nun wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| - (-(A \cap B) \cap (A \cap C)|) \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k = \frac{1}{4}(1 + (-1)^{n-1}(2n+1))$$

Lösung:

1. Induktionsbeginn: $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^1 (-1)^{k-1} k = 1 = \frac{1}{4} * 4 = \frac{1}{4}(1 - (2 * 1 + 1))$$

2. Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k = \frac{1}{4}(1 + (-1)^{n-1}(2n+1))$$

3. Induktionsbehauptung:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} k = \frac{1}{4}(1 + (-1)^{(n+1)-1}(2(n+1)+1))$$

4. Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k &= \frac{1}{4}(1 + (-1)^{n-1}(2n+1)) \\ (-1)^n(n+1) + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k &= (-1)^n(n+1) + \frac{1}{4}(1 + (-1)^{n-1}(2n+1)) \\ \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} k &= \frac{1}{4}(-1)^n * 4(n+1) + \frac{1}{4}(1 + (-1)^{n-1}(2n+1)) \\ &= \frac{1}{4}(1 - (-1)^n(2n+2-1) + (-1)^n * 4(n+1)) \\ &= \frac{1}{4}(1 + (-1)^n(4(n+1) - 2(n+1) + 1)) \\ &= \frac{1}{4}(1 + (-1)^{(n+1)-1}(2(n+1)+1)) \end{aligned}$$

Aufgabe 8 Beweisen Sie für die durch:

$$a_0 = 2, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}$$

rekursiv definierte Folge $(a_0, a_1, \dots)$ die folgende explizite Darstellung:

$$a_n = \frac{n+2}{n+1}$$

Lösung:

1. Induktionsbeginn: $n = 0$:

$$a_0 = 2 = \frac{2}{1} = \frac{0+2}{0+1}$$

2. Induktionsvoraussetzung:

$$a_n = \frac{n+2}{n+1}$$

3. Induktionsbehauptung:

$$a_n = \frac{(n+1)+2}{(n+1)+1} = \frac{n+3}{n+2}$$

4. Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2 - \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = 2 - \frac{n+1}{n+2} \\ &= \frac{2(n+2) - (n+1)}{n+2} = \frac{(n+1)+2}{(n+1)+1} \end{aligned}$$

Aufgabe 9

Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) $4^n \leq n!$ für $n \geq 9$

(b) $4^n \geq n^4$ für $n \geq 4$

Lösung:

(a)

1. Induktionsbeginn: $n = 9$:

$$\begin{aligned} \frac{9!}{4^9} &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4^9} = \frac{9 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4^3}{4^9} \\ &= \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3}{4^5 \cdot 2} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5}{2 \cdot 4^5} = \frac{2835}{2048} \geq 1 \\ &\implies 9! \geq 4^9 \end{aligned}$$

2. Induktionsvoraussetzung:

$$4^n \leq n!$$

3. Induktionsbehauptung:

$$4^{n+1} \leq (n+1)!$$

4. Induktionsschritt:

$$n! \geq 4^n \implies (n+1)n! \geq (n+1)4^n \implies (n+1)! \geq (n+1)4^n \geq 4 * 4^n = 4^{n+1}$$

(b)

1. Induktionsbeginn: $n = 4$:

$$4^4 \geq 4^4$$

2. Induktionsvoraussetzung:

$$4^n \geq n^4$$

3. Induktionsbehauptung:

$$4^{n+1} \geq (n+1)^4$$

4. Induktionsschritt:

$$4^n \geq n^4 \implies 4 * 4^n \geq 4 * n^4 \implies 4^{n+1} \geq 4n^4$$

Falls nun $4n^4 \geq (n+1)^4$ gilt, ist man fertig. Für $n \geq 4$ kann man dies zeigen: Es gilt für $n \geq 4$:

$$\begin{aligned} (n+1)^4 &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \leq n^4 + 4\frac{n}{4}n^3 + 6\frac{n^2}{4^2}n^2 + 4\frac{n^3}{4^3}n + \frac{n^4}{4^4} \\ &= n^4(1 + 1 + \frac{6}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \frac{1}{4^4}) \leq n^4(2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 4n^4 \end{aligned}$$

Also erhält man:

$$4^{n+1} \geq (n+1)^4$$

Aufgabe 10

Grundaufgabe der klassischen Statistik: Auf n Zellen sollen k unterscheidbare Teilchen so verteilt werden, dass in der Zelle i genau k_i Teilchen liegen, $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$. Eine Anordnung innerhalb einer Zelle werde nicht berücksichtigt.

Zeigen Sie: Es gibt genau

$$\frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$$

verschiedene Verteilungen.

Lösung:

Wir führen nun eine Induktion über n und zeigen in jedem Schritt, dass die Aussage für alle $k_1, k_2, \dots, k_n$ gültig.

1. *Induktionsbeginn* $n = 1$:

Es gibt nur eine mögliche Anordnung und $\frac{k!}{k_1!} = 1$.

2. *Induktionsvoraussetzung*:

Für alle $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ gilt, gibt es

$$\frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$$

mögliche Anordnungen.

3. *Induktionsbehauptung*:

Für alle $k_1, k_2, \dots, k_{n+1} \in \mathbb{N}$ gilt, gibt es

$$\frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_{n+1}!}$$

mögliche Anordnungen.

4. *Induktionsschritt*:

Seien $k_1, k_2, \dots, k_{n+1} \in \mathbb{N}$ und $k = k_1 + k_2 + \dots + k_{n+1}$, dann fixiert man nun die Teilchen, welche in der Zelle $n+1$ sind, bleiben noch genau $k - k_{n+1}$ Teilchen übrig, welche man in den anderen Zellen verteilt. Nach Induktionsannahme gibt es hierfür

$$\frac{(k - k_{n+1})!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$$

viele Möglichkeiten und um für die Zelle $n+1$, k_{n+1} viele Teilchen aus k Teilchen auszuwählen, gibt es

$$\binom{k}{k_{n+1}} = \frac{k!}{(k - k_{n+1})!k_{n+1}!}$$

viele Möglichkeiten. Insgesamt hat man also

$$\frac{(k - k_{n+1})!}{k_1!k_2!\dots k_n!} \cdot \frac{k!}{(k - k_{n+1})!k_{n+1}!} = \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_{n+1}!}$$

Viele Möglichkeiten.