

11. Sind die folgenden Folgen konvergent? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an. Ebenso, wenn ein Grenzwert g existiert, geben Sie für alle $\varepsilon > 0$ ein N_ε an, so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt $|a_n - g| < \varepsilon$.

(a) $a_n = \frac{(n+1)(n^2-1)}{(5n-1)(4n^2+1)},$

(b) $b_n = \frac{(n+1)(n^3-1)}{(2n^2+1)(3n+1)}.$

12. Die Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist durch folgendes Bildungsgesetz gegeben: sei $n = \sum_{k=0}^K z_k 10^k$ die Zifferndarstellung von n , dann ist

$$v_n = \sum_{k=0}^K z_k 10^{-k-1},$$

also z.B. $v_{123} = 0.321$ oder $v_{5430} = 0.0345$. Zeigen Sie, dass jeder Punkt in $[0, 1]$ ein Häufungspunkt dieser Folge ist. Hinweis: Geben Sie zu einem Punkt $x \in [0, 1]$ eine Teilfolge von $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, die gegen x konvergiert.

13. Zeigen Sie: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right) = \frac{1}{2}.$

Hinweis: Schätzen Sie den Klammer-Ausdruck geeignet nach oben und unten ab, und zeigen Sie von den beiden neuen Folgen, dass sie den Grenzwert $\frac{1}{2}$ besitzen!

14. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $(1 - \frac{1}{n^2})^n$ und schätzen Sie diesen Ausdruck nach beiden Seiten ab; die Bernoulli-Ungleichung hilft dabei.

15. Ist die Folge $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ konvergent? (Hinweis: untersuchen Sie die Folge auf Monotonie und Beschränktheit)

$$11) a) \quad a_n = \frac{(n+1)(n^2-1)}{(5n-1)(4n^2+1)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(i) Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ finden, falls existent:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n^2-1)}{(5n-1)(4n^2+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3}(n+1)(n^2-1)}{\frac{1}{n^3}(5n-1)(4n^2+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+\frac{1}{n}) \cdot (1-\frac{1}{n^2})}{(5-\frac{1}{n}) \cdot (4+\frac{1}{n^2})} \end{aligned}$$

Da alle 4 Limiten existieren, darf $\lim_{n \rightarrow \infty}$ aufgeteilt werden

$$= \frac{(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n}) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n^2})}{(\lim_{n \rightarrow \infty} 5 - \frac{1}{n}) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \frac{1}{n^2})} = \frac{1 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{1}{20}$$

(ii) Definition von Konvergenz nachweisen:

→ Grenzwert laut (i) ist $a = \frac{1}{20}$. Zu zeigen ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon > 0 \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Wir beginnen zuerst damit den Term $|a_n - a|$ soweit wie möglich abzuschätzen bevor N_ε konstruiert wird.

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left| \frac{(n+1) \cdot (n^2-1)}{(5n-1)(4n^2+1)} - \frac{1}{20} \right| \\ &= \left| \frac{20 \cdot (n^3 - n + n^2 - 1) - (5n-1)(4n^2+1)}{20(5n-1)(4n^2+1)} \right| \\ &= \left| \frac{20n^3 + 20n^2 - 20n - 20 - (20n^3 + 5n - 4n^2 - 1)}{20(5n-1)(4n^2+1)} \right| \\ &= \left| \frac{24n^2 - 25n - 19}{20(5n-1)(4n^2+1)} \right| = \frac{|24n^2 - 25n - 19|}{20 \cdot |5n-1| \cdot |4n^2+1|} \end{aligned}$$

Von wird der Zähler nach oben abgeschätzt und die Terme im Nenner nach unten abgeschätzt:

$$\rightarrow |24n^2 - 25n - 19| \stackrel{\substack{\text{Dreiecks-} \\ \text{Ungleichung}}}{\leq} 24n^2 + 25n + 19$$

$$\stackrel{\substack{\text{Hier wurde} \\ 1 \leq n \leq n^2 \text{ genutzt}}}{\rightarrow} \leq 24n^2 + 25n^2 + 19n^2 = 68n^2$$

$$\rightarrow |5n - 1| = (5n - 1) \geq 5n - n = 4n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|5n - 1|} \leq \frac{1}{4n}$$

$$\rightarrow |4n^2 + 1| = 4n^2 + 1 \geq 4n^2 \Rightarrow \frac{1}{|4n^2 + 1|} \leq \frac{1}{4n^2}$$

Mit diesen 3 Abschätzungen folgt insgesamt

$$|a_n - a| = \frac{|24n^2 - 25n - 19|}{20|5n - 1| \cdot |4n^2 + 1|} \leq \frac{68n^2}{20 \cdot 4n \cdot 4n^2} = \frac{68}{320} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$\underbrace{\frac{68}{320} \leq 1}$

Von ist es leicht N_ϵ so zu konstruieren, dass $|a_n - a| < \epsilon$ für $n \geq N_\epsilon$ gilt, denn die Rechnung

$$|a_n - a| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\epsilon} \stackrel{!}{\leq} \epsilon$$

Um die letzte Ungleichung zu erfüllen reicht es $N_\epsilon = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$ zu wählen (Gauß-Klammern stehen für Aufrunden).

$$b) \quad b_n = \frac{(n+1)(n^3-1)}{(2n^2+1)(3n+1)} \stackrel{\substack{\text{Zähler \& Nenner} \\ \text{mit } \frac{1}{n^3} \text{ multipl.}}}{=} \frac{(n+1) \cdot (1 - \frac{1}{n^3})}{(2 + \frac{1}{n^2}) \cdot (3 + \frac{1}{n})}$$

$$= (n+1) \cdot \frac{(1 - \frac{1}{n^3})}{\underbrace{(2 + \frac{1}{n^2})}_{\leq 3} \cdot \underbrace{(3 + \frac{1}{n})}_{\leq 4}} \geq \frac{1}{12} \cdot (n+1) \cdot \underbrace{(1 - \frac{1}{n^3})}_{\geq 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \text{ für } n \geq 2}$$

Somit gilt $b_n \geq \underbrace{\frac{7}{8 \cdot 12}}_{> 0 \text{ \& konstant}} \cdot \underbrace{(n+1)}_{\rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty}$, woraus sofort folgt

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \Rightarrow$ Es existiert kein Grenzwert.

12) Gegeben ist $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ durch das Gesetz

$$v_n = \sum_{k=0}^n z_k \cdot 10^{-k-1} \quad \text{für} \quad n = \sum_{k=0}^n z_k 10^k.$$

Sei nun $x \in [0, 1]$ beliebig, aber fest. Dann muss gezeigt werden, dass eine Teilfolge $(v_{n_e})_{e \in \mathbb{N}}$ existiert, sodass

$$\lim_{e \rightarrow \infty} v_{n_e} = x.$$

Sei dazu $x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots$ die Dezimaldarstellung, wobei für $x = 1$ die Darstellung $x = 0, 999 \dots$ gewählt wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist diese Darstellung unendlich lang und endet nicht nur mit $000 \dots$ (Wäre $x = 0, x_1 x_2 \dots x_m$ mit $x_m \neq 0$, so schreibt man einfach $x = 0, x_1 x_2 \dots (x_m - 1) 9999 \dots$, dieses Argument funktioniert aber nicht für $x = 0$, dieser Spezialfall wird zum Schluss behandelt).

Wähle dann $n_e = \sum_{k=0}^e x_k 10^k$, denn so gilt

$$\begin{aligned} |x - v_{n_e}| &= \left| \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot 10^{-k-1} \right) - \left(\sum_{k=0}^e x_k \cdot 10^{-k-1} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=e+1}^{\infty} x_k \cdot 10^{-k-1} \right| = \sum_{k=e+1}^{\infty} x_k \cdot 10^{-k-1} \\ &\leq \sum_{k=e+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 9 \cdot 10^{-(k+e+1)-1} \\ &= 10^{-e-1} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k-1}}_{= 0,9999 \dots = 1} = \frac{1}{10^{e+1}} \xrightarrow{e \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Somit konvergiert die Teilfolge gegen x so wie gewünscht. Für $x = 0$ wähle einfach $(v_{10^e})_{e \in \mathbb{N}}$ als Teilfolge.

Anschauliches Beispiel:

$$x = \sqrt{2} - 1 = 0,41421356\dots$$

$n_1 = 4$	$\rightarrow V_{n_1} = V_4 = 0,4$	$\downarrow$ konverg. gegen $\sqrt{2} - 1$
$n_2 = 14$	$\rightarrow V_{n_2} = V_{14} = 0,41$	
$n_3 = 414$	$\rightarrow V_{n_3} = V_{414} = 0,414$	
$n_4 = 2414$	$\rightarrow V_{n_4} = V_{2414} = 0,4142$	
$n_5 = 12414$	$\rightarrow V_{n_5} = V_{12414} = 0,41421$	
$\vdots$		

Für $x = 0$

$n_1 = 10$	$\rightarrow V_{n_1} = V_{10} = 0,01$	$\downarrow$ konverg. gegen 0
$n_2 = 100$	$\rightarrow V_{n_2} = V_{100} = 0,001$	
$n_3 = 1000$	$\rightarrow V_{n_3} = V_{1000} = 0,0001$	
$\vdots$		

Analysis 1

UE 3

$$13) \quad X_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Es gilt einerseits

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \\ &\leq \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot (1+2+3+\dots+n) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ für } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

andererseits

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \\ &\geq \frac{1}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \\ &= \frac{1}{n^2+n} \cdot (1+2+3+\dots+n) = \frac{1}{n \cdot (n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Folglich gilt auch $X_n \rightarrow \frac{1}{2}$ für $n \rightarrow \infty$. Hier wurde die Gauß'sche Summenformel

$$(1+2+\dots+n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

verwendet.

$$14) \text{ Zeige, dass } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Lösung mit Hinweis auf
letzte Seite

→ Aus VO ist bekannt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Weiters gilt für $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, dass

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} \\ &= \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{b_n}{c_n} \quad \text{mit } b_n = \frac{n-1}{n} \text{ \& } c_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Da beide Folgen konvergieren, und der Grenzwert von $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht 0

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n} = \frac{1}{e}$$

$$15) \quad x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

i) Monotonie:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2} \\ &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= x_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = x_n + \frac{2n+2 - (2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= x_n + \underbrace{\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}}_{>0} > x_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton steigend

ii) Beschränktheit:

$$x_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\leq \frac{1}{n}} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\leq \frac{1}{n}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\leq \frac{1}{n}} \leq n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Folge also streng monoton steigend & nach oben beschränkt

$\Rightarrow$ Folge konvergent laut Satz von der monotonen Konvergenz

14) Hinweis: Betrachte die Folgen

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \quad c_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Laut VO ist bekannt, dass $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$. Weiters ist erkennbar, dass

$$a_n \cdot b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = c_n$$

gilt. Da $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$ gezeigt werden soll, müsste auch $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \cdot \frac{1}{e} = 1$ gelten. Dies zeigen wir wie folgt:

$$(i) \quad c_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 1^n = 1$$

$$(ii) \quad c_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Bernoulli - Ungleichung
 $1 + nx \leq (1+x)^n, \quad x \geq -1$

$$x = -\frac{1}{n^2}$$

Also gilt tatsächlich $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ (Einzwickelsatz)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \cdot b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$