

4. Blatt

16. Untersuchen Sie die folgenden rekursiv definierten Folgen (x_n) auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte.

a) $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}$ für $n \geq 0$ und $x_0 = 0$

• Monotonie: $x_n \leq x_{n+1}$, d.h. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton steigend:

Beweis mittels vollständiger Induktion

Induktionsbasis: $n=0$

z.z. $x_0 \leq x_1$

$x_0 = 0$ und $x_1 = x_0^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow x_0 \leq x_1 \checkmark$

Induktionsvoraussetzung: $x_n \leq x_{n+1}$

Induktionsbehauptung: $x_{n+1} \leq x_{n+2}$

z.z. $x_{n+1} \leq x_{n+2} \Leftrightarrow x_n^2 + \frac{1}{4} \leq (x_{n+1})^2 + \frac{1}{4}$

Wir wissen aus der Induktionsvoraussetzung:

$x_n \leq x_{n+1} \Rightarrow x_n^2 \leq x_{n+1}^2 \Rightarrow \underbrace{x_n^2 + \frac{1}{4}}_{x_{n+1}} \leq \underbrace{x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}}_{x_{n+2}} \Rightarrow x_{n+1} \leq x_{n+2}$

• Beschränktheit: $0 \leq (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \leq \frac{1}{2}$

Beweis mittels vollständiger Induktion

Induktionsbasis: $n=0$

z.z. $0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}$

$x_0 = 0 \Rightarrow \checkmark$

Induktionsvoraussetzung: $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$

Induktionsschritt: $x_{n+1} \geq 0$ und $x_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

1) z.z. $0 \leq x_{n+1}$

Wir wissen: $0 \leq x_n \Rightarrow 0 \leq x_n^2 \Rightarrow 0 \leq x_n^2 + \frac{1}{4} = x_{n+1} \Rightarrow 0 \leq x_{n+1}$

2) z.z. $x_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

Wir wissen: $x_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x_n^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \underbrace{x_n^2 + \frac{1}{4}}_{x_{n+1}} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

• monoton & beschränkt $\Rightarrow$ Folge ist konvergent.

• Wir können also einen Grenzwert bestimmen: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + \frac{1}{4}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow x = x^2 + \frac{1}{4}$

$0 = x^2 - x + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

p,q-Formel: $0 = x^2 + px + q \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}$

b) $x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n}$ für $n \geq 0$ und $x_0 = 2$

• Monotonie: $x_n \leq x_{n+1}$, d.h. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton steigend

Beweis mittels vollständiger Induktion

Induktionsbasis: $n=0$

z.z. $x_0 \leq x_1$

$x_0 = 2$ und $x_1 = 3 - \frac{1}{x_0} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$

Induktionsvoraussetzung: $x_n \leq x_{n+1}$

Induktionsschritt: $x_{n+1} \leq x_{n+2}$

z.z. $x_{n+1} \leq x_{n+2} \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{x_n} \leq 3 - \frac{1}{x_{n+1}}$

Wir wissen: $x_n \leq x_{n+1}$ aus der Induktionsvoraussetzung

$\Leftrightarrow 3 - \frac{1}{x_{n-1}} \leq 3 - \frac{1}{x_n}$

$[x_n \leq x_{n+1} \Rightarrow 3 + x_n \leq 3 + x_{n+1}]$

$x_n \leq x_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{x_n} \geq \frac{1}{x_{n+1}} \Rightarrow 3 + \frac{1}{x_n} \geq 3 + \frac{1}{x_{n+1}}$

$\Rightarrow \underbrace{3 - \frac{1}{x_n}}_{x_{n+1}} \leq \underbrace{3 - \frac{1}{x_{n+1}}}_{x_{n+2}} \Rightarrow x_{n+1} \leq x_{n+2}$

• Beschränktheit: $2 \leq (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \leq 3$

Beweis mittels vollständiger Induktion

Induktionsbasis: $n=0$

z.z. $2 \leq x_0 \leq 3 \rightarrow$ klar, da $x_0 = 2$ laut Angabe.

Induktionsvoraussetzung: $2 \leq x_n \leq 3$

Induktionsschritt: $2 \leq x_{n+1} \leq 3$

1) zz. $2 \leq x_{n+1}$

Wir wissen: $x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n}$ und $2 \leq x_n$
 $2 \leq x_n \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{x_n} \Rightarrow 3 + \frac{1}{2} \geq 3 + \frac{1}{x_n} \Rightarrow \underbrace{3 - \frac{1}{x_n}}_{x_{n+1}} \geq 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} > 2$

2) zz. $x_{n+1} \leq 3$

Wir wissen: $x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n}$ und $x_n \leq 3$
 $x_n \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow 3 + \frac{1}{x_n} \geq 3 + \frac{1}{3} \Rightarrow \underbrace{3 - \frac{1}{x_n}}_{x_{n+1}} \leq 3 - \frac{1}{3} \leq 3$

• monoton & beschränkt $\Rightarrow$ Folge ist konvergent.

• Wir können also einen Grenzwert bestimmen: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (3 - \frac{1}{x_n}) = 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \Rightarrow x = 3 - \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 3x - 1$

$0 = x^2 - 3x + 1$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{4}{4}} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.381966 \rightarrow \frac{1}{2} \text{ da } 2 \leq x_n \leq 3$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2.618$

c) $x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n}$ für $n \geq 0$ und $x_0 = 0$.

$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{5} = 0.4, x_3 = \frac{5}{12} \approx 0.41\bar{6}, x_4 = \frac{12}{29} \approx 0.4137$

$\Rightarrow$ es handelt sich um eine alternierende Folge, wir betrachten also Teilfolgen:

$(x_{2\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$(x_{2\ell+1})_{\ell \in \mathbb{N}}$ ist ebenfalls eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Die beiden Folgen decken alle Elemente der ursprünglichen Folge ab
 $\rightarrow$ gerade Indizes & ungerade Indizes

Behauptung: $(x_{2\ell})$ ist monoton & beschränkt, $(x_{2\ell+1})$ ist monoton & beschränkt

Wir können für die gesamte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Beschränktheit zeigen, dann sind die Teilfolgen auch beschränkt:

• Beschränktheit: $0 \leq (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \leq \frac{1}{2}$

Induktionsbasis: $n=0$

$0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}$ da $x_0 = 0$ ✓

Induktionsvoraussetzung: $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$

Induktionsschritt: zz. $0 \leq x_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

1) zz. $0 \leq x_{n+1}$: Klar, da $x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n}$ und $x_n \geq 0$

2) zz. $x_{n+1} \leq \frac{1}{2}$: Klar, da $x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n} \leq \frac{1}{2}$, da $x_n \geq 0$ ($\max_{x \in \mathbb{R}_+} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}$)

$x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+x_{n-1}}} = \frac{2+x_{n-1}}{5+2x_{n-1}}$

• Monotonie: (i) $(x_{2\ell})$ ist monoton wachsend

zz. $x_{2\ell} \leq x_{2(\ell+1)} = x_{2\ell+2}$

Induktionsbasis: $\ell=0$

$x_0 \leq x_2$ ✓ mit $x_0 = 0, x_2 = \frac{2}{5}$

Induktionsvoraussetzung: $x_{2\ell} \leq x_{2\ell+2}$

Induktionsschritt: $x_{2\ell+2} \leq x_{2\ell+4}$

$x_{2\ell+2} = \frac{2+x_{2\ell}}{5+2x_{2\ell}} \leq \frac{2+x_{2\ell+2}}{5+2x_{2\ell+2}} = x_{2\ell+4}$

$\Leftrightarrow (5+2x_{2\ell+2})(2+x_{2\ell}) \leq (5+2x_{2\ell})(2+x_{2\ell+2})$

$\Leftrightarrow 10 + 5x_{2\ell} + 4x_{2\ell+2} + 2x_{2\ell+2}x_{2\ell} \leq 10 + 5x_{2\ell+2} + 4x_{2\ell} + 2x_{2\ell}x_{2\ell+2}$

$\Leftrightarrow 5x_{2\ell} + 4x_{2\ell+2} \leq 5x_{2\ell+2} + 4x_{2\ell}$

$\Leftrightarrow x_{2\ell} \leq x_{2\ell+2}$ ✓ laut IV

(ii) $(x_{2\ell+1})$ ist monoton fallend

zz. $x_{2\ell+1} \geq x_{2(\ell+1)+1} = x_{2\ell+3}$

IB: $\ell=0$

$x_1 \geq x_3$ ✓ mit $x_1 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{5}{12}$

IV: $x_{2\ell+1} \geq x_{2\ell+3}$

IS: $x_{2\ell+3} \geq x_{2\ell+5}$

$x_{2\ell+3} = \frac{2+x_{2\ell+1}}{5+2x_{2\ell+1}} \geq \frac{2+x_{2\ell+3}}{5+2x_{2\ell+3}} = x_{2\ell+5}$

$\Leftrightarrow (5+2x_{2\ell+3})(2+x_{2\ell+1}) \geq (5+2x_{2\ell+1})(2+x_{2\ell+3})$

$\Leftrightarrow 10 + 5x_{2\ell+1} + 4x_{2\ell+3} + 2x_{2\ell+3}x_{2\ell+1} \geq 10 + 5x_{2\ell+3} + 4x_{2\ell+1} + 2x_{2\ell+1}x_{2\ell+3}$

$\Leftrightarrow 5x_{2\ell+1} + 4x_{2\ell+3} \geq 5x_{2\ell+3} + 4x_{2\ell+1}$

$\Leftrightarrow x_{2\ell+1} \geq x_{2\ell+3}$ ✓ laut IV

• Beide Teilfolgen sind also monoton & beschränkt, also konvergent. Wir bestimmen die Grenzwerte:

Da beide Teilfolgen die gleiche Rekursionsvorschrift haben und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$:

$x = \frac{2+x}{5+2x} \Leftrightarrow 5x+2x^2 = 2+x \Leftrightarrow 2x^2+4x-2 = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-1 = 0$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, außerdem: $0 \leq (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \leq \frac{1}{2}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$

(Beide Teilfolgen konvergieren gegen den gleichen Grenzwert, daher konvergiert die gesamte Folge)

17. Lösen Sie folgende Gleichungen über den komplexen Zahlen. Geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil der Lösung an.

a) $\frac{(1+2i)z + 9}{(3+4i)z - (9+4i)} = 8-5i$

$$\Leftrightarrow (1+2i)z + 9 = (8-5i)[(3+4i)z - (9+4i)]$$

$$\Leftrightarrow (1+2i)z + 9 = (8-5i)(3+4i)z - (8-5i)(9+4i)$$

$$\Leftrightarrow (1+2i)z + 9 = 24z + 32iz - 15iz - 20i^2z - (72 + 32i - 45i - 20i^2) \quad | i^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow (1+2i)z + 9 = 24z + 17iz + 20z - 72 + 13i - 20$$

$$\Leftrightarrow (1+2i)z + 9 = 44z + 17iz - 92 + 13i$$

$$\Leftrightarrow z + 2iz + 9 = 44z + 17iz - 92 + 13i$$

$$\Leftrightarrow -43z - 15iz = -101 + 13i$$

$$\Leftrightarrow z(-43-15i) = -101 + 13i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-101 + 13i}{-43 - 15i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-101 + 13i}{-43 - 15i} \cdot \frac{-43 + 15i}{-43 + 15i} = \frac{4343 - 2074i + 195i^2}{43^2 - 43 \cdot 15i + 43 \cdot 15i - (15i)^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4343 - 2074i - 195}{4849 + 225} = \frac{4148 - 2074i}{2074}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4148}{2074} - \frac{2074i}{2074} = 2 - i \quad \Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{Re}(z)=2, \operatorname{Im}(z)=-1}}$$

b) $z^2 - 7z + (13-i) = 0$

Wende p,q-Formel an: $z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$$z_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (13-i)} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-52+4i}{4}} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{-3+4i}{4}} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{-3+4i}{4}}$$

Es gilt: $(1+2i)^2 = (1+2i)(1+2i) = 1+2i+2i+4i^2 = 1+4i-4 = -3+4i$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{-3+4i}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{-3+4i}}{2} = \frac{7 \pm (1+2i)}{2}$$

$$z_1 = \frac{7 + (1+2i)}{2} = \frac{8+2i}{2} = 4+i \quad \Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{Re}(z_1)=4, \operatorname{Im}(z_1)=1}}$$

$$z_2 = \frac{7 - (1+2i)}{2} = \frac{6-2i}{2} = 3-i \quad \Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{Re}(z_2)=3, \operatorname{Im}(z_2)=-1}}$$

c) $z^4 = -4$ Es gilt: $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow z^2 = \pm \sqrt{-4} = \pm \sqrt{4 \cdot (-1)} = \pm \sqrt{4i^2} = \pm \sqrt{(2i)^2} = \pm 2i$$

$$z_{1,2}^2 = \pm 2i$$

$$\Leftrightarrow z^2 = \pm 2i$$

1) $\Rightarrow z^2 = 2i$

$$z = x+iy$$

$$\Rightarrow (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 2i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, & x^2 = y^2 \\ 2ixy = 2i \\ \text{d.h. } xy = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 = y^2, \text{ d.h. } \pm x = \pm y \text{ und } xy = 1$$

$$\Rightarrow x = 1, y = 1 \text{ oder } x = -1, y = -1$$

2) $\Rightarrow z^2 = -2i$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = -2i \quad \Rightarrow x^2 = y^2, \quad xy = -1$$

$$\Rightarrow x = -1, y = 1 \text{ oder } x = 1, y = -1$$

$z_1 = 1+i$	$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1)=1, \operatorname{Im}(z_1)=1$
$z_2 = -1-i$	$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_2)=-1, \operatorname{Im}(z_2)=-1$
$z_3 = -1+i$	$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_3)=-1, \operatorname{Im}(z_3)=1$
$z_4 = 1-i$	$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_4)=1, \operatorname{Im}(z_4)=-1$

18. Bestimmen Sie die Werte der Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Hinweis: Finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für die Partialsummen $\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = ? \right)$.

$$\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{2}{n(n+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

* Aus der Vorlesung: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

• Fixieren wir also zuerst ein $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{N}{N+1} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n(n+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{N}{N+1} - \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{N}{N+1} - \frac{N}{N+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)} \end{aligned}$$

• Jetzt allgemein:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} \right] \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$

Hinweis: schreiben Sie $n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + \dots$ und verwenden Sie die Reihendarstellung für e .

Es gilt: $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e + e = 2e$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e + 2e + e = 5e$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^4}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+2n+1)(n+1)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= 5e + 6e + 3e + e = 15e \end{aligned}$$

Mit Hinweis: $n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + n$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6n(n-1)(n-2)}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7n(n-1)}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = \\ &= \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-4)!} + 6 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 7 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + 7 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 15e \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!} = 15e$$