Musterlösung Blatt 5

Aufgabe 19

Für die nachstehende Funktionen ist zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ so zu bestimmen, dass aus $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ die Beziehung $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ folgt.

$$f(x) = x^3, D(f) = |f(x) - f(x_0)| \leq \mathbb{R}.$$

Lösung: Sei $\delta \leq 1$ oBdA.
Es gilt

$$0 < |x - x_0| < \delta \leq 1 \ \Rightarrow |x| = |x - x_0 + x_0| \leq |x - x_0| + |x_0| < 1 + |x_0|$$

und daher:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |x^3 - x_0^3| = |(x - x_0) \cdot (x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2)| \\
&\leq |x - x_0| \cdot (|x|^2 + |x| \cdot |x_0| + |x_0|^2) \\
&\leq |x - x_0| \cdot ((1 + |x_0|)^2 + (1 + |x_0|) \cdot |x_0| + |x_0|^2) \\
&= |x - x_0| \cdot (3|x_0|^3 + 3|x_0| + 1).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir mit dem Ansatz $|x - x_0| < \delta_\varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3|x_0|^2+3|x_0|+1}, 1\right\}$:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &\leq |x - x_0| \cdot (3|x_0|^3 + 3|x_0| + 1) < \delta_\varepsilon \cdot (3|x_0|^3 + 3|x_0| + 1) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3|x_0|^2 + 3|x_0| + 1} \cdot (3|x_0|^3 + 3|x_0| + 1) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Aufgabe 20

Finden Sie die Lösung der Gleichung $x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = 0$ durch Intervallhalbierung wie beim Beweis des Nullstellensatzes auf zwei Nachkommastellen genau.

Lösung: Man finde $a < b \in \mathbb{R}$: $f(a) < 0 \wedge f(b) > 0$, zum Beispiel $a = 2$ und $b = 3$. Dann definiere man sich Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie beim Beweis vom Nullstellensatz und berechnet sich die ersten Folgenglieder:

n	x_n	y_n
0	2	3
1	2.5	3
2	2.75	3
3	2.875	3
4	2.875	2.9375
5	2.875	2.90625
6	2.890625	2.90625
7	2.8984375	2.90625
8	2.90234375	2.90625

Für $n = 8$ erhält man $|x_n - y_n| < 0.01$ und somit, dass man den Grenzwert auf 2 Nachkommastellen genau berechnet hat. Das Polynom hat also eine Nullstelle bei $x \approx 2.9$.

Aufgabe 21

Beweisen Sie: Ist $f\colon [a,b] \to [a,b]$ stetig, so gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \xi$. Der Punkt ξ heißt Fixpunkt der Funktion f. (Hinweis: betrachten Sie die Funktion $g(x) = f(x) - x$)

Lösung: Man betrachte die Funktion $g(x)$ vom Hinweis. Es gilt $f([a,b]) \subseteq [a,b]$ (da das Bild von f per Definition in $[a,b]$ liegt) und somit

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \wedge g(b) = f(b) - b \leq 0.$$

Nun wende man den Nullstellensatz für g an und erhält: $\forall y \in [g(b), g(a)]\colon \exists x \in [a,b]\colon g(x) = y$. Insbesondere gilt dies für $y = 0$ und somit gilt:

$$\exists \xi \in [a,b]\colon g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi.$$

□

Aufgabe 22

Drücken Sie $\cos(5x)$ nur durch $\cos(x)$ aus. Hinweis: benützen Sie dazu $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$ und die Formel von de Moivre.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\cos(5x) &= \Re(\cos(5x) + i \cdot \sin(5x)) = \Re(e^{i5x}) = \Re((e^{ix})^5) = \Re((\cos(x) + i \cdot \sin(x))^5) \\
&= \Re(\cos(x)^5 + i \cdot 5\cos(x)^4 \sin(x) - 10\cos(x)^3 \sin(x)^2 - i \cdot 10 \cos(x)^2 \sin(x)^3 + 5\cos(x)\sin(x)^4 + i \cdot 5 \sin(x)^5) \\
&= \cos(x)^5 - 10\cos(x)^3 \sin(x)^2 + 5\cos(x)\sin(x)^4 \\
&= \cos(x)^5 - 10\cos(x)^3 \cdot (1 - \cos(x)^2) + 5\cos(x) \cdot (1 - \cos(x)^2)^2 \\
&= 16\cos(x)^5 - 20\cos(x)^3 + 5\cos(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 23

Gegeben sei die Folge $x_1 = 0, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2 - x_n} = \pi.$$

Hinweis: verwenden Sie die Halbwinkelsätze $(0 \leq x \leq \pi)$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}, \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}},$$

um einen einfachen Ausdruck für x_n und $\sqrt{2 - x_n}$ zu finden.

Lösung: Um einen Ansatz zu entwickeln, forme man x_3 um:

$$x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{4 \cdot \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}{2}} = 2 \cdot \cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right).$$

Man beweise nun also $x_n = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$:

- IA: $x_1 = 0 = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
- IV: $x_n = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.
- IS: $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} = \sqrt{2 + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \sqrt{4 \cdot \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Daraus folgt direkt:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \sqrt{2 - x_n} = \sqrt{4 \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}} = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

Und somit gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2 - x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Nun muss nur noch ausgenützt werden, dass $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, was in der Vorlesung gelernt wurde:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \pi \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \pi \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \pi \cdot 1 = \pi.$$

$\square$

Aufgabe 24

Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right).$$

Lösung: Für $a = 0$ divergiert die Folge bestimmt gegen $-\infty$, für $a < 0$ ist sie nicht wohldefiniert. Also gelte $a > 0$. Da $\sqrt[n]{a} = e^{\frac{\ln(a)}{n}}$ und $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, was in der Vorlesung gelernt wurde, gilt dann:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \ln(a) \cdot \frac{e^{\frac{\ln(a)}{n}} - 1}{\frac{\ln(a)}{n}} = \ln(a) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\ln(a)}{n}} - 1}{\frac{\ln(a)}{n}} = \ln(a) \cdot 1 = \ln(a).$$