Analysis T1, Übungsblatt 6

25) Ges: Ableitung sowie Definitionsbereich folgender Ausdrücke:

a) $\cos(x^2)\exp(\arccos(\sqrt{x}))$

$u(x) := \cos(x^2)$

$v(x) := \exp(\arccos(\sqrt{x}))$

Zuerst: $u'(x)$

$f(x) := x^2 \qquad f'(x) = 2x$

$g(x) := \cos(x) \qquad g'(x) = -\sin(x)$

$u'(x) = (g(f(x)))' \underset{\text{Chain Rule}}{=} f'(x) \cdot g'(f(x)) = -2x\sin(x)$

Nun: $v'(x)$

$f(x) := \sqrt{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$g(x) := \arccos(x) \qquad g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (via Tabelle)

$h(x) := \exp(x) \qquad h'(x) = \exp(x)$

$v'(x) = (h(g(f(x))))' \underset{\text{Kettenregel}}{=} (g(f(x)))' \cdot h'(g(f(x))) \underset{\text{kettenregel}}{=}$

$= f'(x) \cdot g'(f(x)) \cdot h'(g(f(x))) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}} \exp(\arccos(\sqrt{x}))$

$= \frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \exp(\arccos(\sqrt{x}))$

Kettenregel:

$(u(x) \cdot v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$

$= -\cos(x^2)\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\exp(\arccos(\sqrt{x})) - 2x\sin(x^2)\exp(\arccos(\sqrt{x}))$

$= -\exp(\arccos(\sqrt{x}))\left(\frac{\cos(x^2)}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + 2x\sin(x^2)\right)$

Für den Definitionsbereich müssen wir uns nur um $\sqrt{x}\sqrt{1-x} \neq 0$, und $\arccos(\sqrt{x})$ kümmern:

- $\sqrt{x} \in [-1,1]$ damit $\arccos(\sqrt{x})$ definiert

$\Rightarrow \sqrt{x} \in [0,1]$ ~~damit~~ da Wurzel positiv

- $x \geq 0$ damit $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ $x \in (0,1)$

offenes Intervall

b) $x^x = e^{x \ln x}$

$g(x) := e^x$ $\qquad g'(x) = e^x$

$f(x) := x \ln x$ $\qquad f'(x) \underset{\text{Produktregel}}{=} x(\ln x)' + (x)' \ln x = x\frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x$

$(x^x)' = (g(f(x)))' \underset{\text{Kettenregel}}{=} f'(x) \cdot g'(f(x)) = (1 + \ln x)e^{x \ln x} = (1 + \ln x)x^x$

Der Definitionsbereich ist $(0, \infty)$ wegen ln.

c) $\exp(\operatorname{Artanh}(x))$

$g(x) = e^x$ $\qquad g'(x) = e^x$

$f(x) = \operatorname{Artanh}(x)$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$(g(f(x)))' = f'(x) \cdot g'(f(x)) = \frac{1}{1-x^2} \exp(\operatorname{Artanh}(x))$

Definitionsbereich: $(-1, 1)$ wegen Artanh, passt auch gleich wegen durch 0 teilen.

26) zz: $f(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ist streng monoton wachsend für $x > 0$.

Dies folgt aus $f'(x) > 0 \quad \forall x > 0$, was wir zeigen werden:

$f(x) = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$

$a(x) := 1 + \frac{1}{x}$ $\qquad a'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$b(x) := \ln(x)$ $\qquad b'(x) = \frac{1}{x}$

$c(x) := x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x\, b(a(x))$

$c'(x) \underset{\text{Produktregel}}{=} x \cdot (b(a(x)))' + b(a(x)) \underset{\text{Kettenregel}}{=} x \cdot a'(x) \cdot b'(a(x)) + b(a(x)) =$

$= x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x}} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$f'(x) \underset{\text{Kettenregel}}{=} c'(x) e^{c(x)}$ $\qquad e^{c(x)} > 0$ gilt sowieso, zz: $c'(x) > 0 \quad \forall x > 0$

Es gilt: $\lim_{x \to \infty} c'(x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln(1) = 0$

Wenn wir nun zeigen, dass $c'(x)$ monoton fallend (streng) ist,

muss $c'(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$ gelten.

$c''(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \underbrace{-\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}_{= (b(a(x)))' \text{ von oben}} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)x} = \frac{x - (x+1)}{(x+1)^2 x} = \frac{-1}{(x+1)^2 x} < 0$

für $x > 0$

$\Rightarrow c'(x)$ ist streng monoton fallend auf $(0, \infty)$ ■

27)

a) zz: $\sin x \overset{(i)}{<} x \overset{(ii)}{<} \tan x \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

(i) Ziel: $f(x) := x - \sin x > 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Es gilt $x - \sin x = 0$ bei $x = 0$ (i.e. $f(0) = 0$)

D.h. es reicht zz., dass $f(x)$ auf $(0, \frac{\pi}{2})$ streng mon. wachsend ist.

$f'(x) = 1 - \cos x$

(*) $\cos x \leq 1$ gilt $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ (brauche ich in (b))

hier brauchen wir aber "<"

$\cos x < 1$ gilt für $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ gilt $x \neq k\pi$

$\Rightarrow f'(x) = 1 - \cos x > 1 - 1 = 0$

(ii) Ziel: $f(x) := \tan x - x > 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Es gilt $f(0) = 0$

zz: $f(x)$ str. mon. wachsend auf $(0, \frac{\pi}{2})$

$f'(x) \underset{\text{via Tabelle}}{=} 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x > 0$ für $\tan x \neq 0$

Dies gilt für $x > 0$ (also $x \in (0, \frac{\pi}{2})$) ∎

b) zz: $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ziel: $f(x) := \cos(x) - (1 - \frac{x^2}{2}) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Es gilt $f(0) = 0$

zz: $f(x)$ mon. fallend auf $(-\infty, 0]$ und $f(x)$ mon. wachsend auf $[0, \infty)$

Fall 1: $x \geq 0$

$f'(x) = -\sin(x) + x = x - \sin(x) \geq 0$ laut (*) (siehe (a)) $\forall x \geq 0$

Fall 2: $x \leq 0$

$f'(x) = -\sin(x) + x \overset{\text{weil } x \leq 0}{=} -\sin(-|x|) - |x| = \sin(|x|) - |x|$

$\sin(|x|) - |x| \leq 0 \Leftrightarrow |x| - \sin(|x|) \geq 0 \Leftrightarrow y - \sin y \geq 0$

für $y \geq 0$ (da $y := |x|$). Dies wurde in Fall 1 bzw (*) gezeigt.

c) zz $\operatorname{Arsinh}(x) \geq \ln(1+x) \quad \forall x > -1$

Ziel: $f(x) := \operatorname{Arsinh}(x) - \ln(1+x) \geq 0 \quad \forall x > -1$

Es gilt $f(0) = \operatorname{Arsinh}(0) - \ln(1+0) = \ln(1) = 0$

zz: $f(x)$ ist mon. fallend für $x \leq 0$ und mon. steigend für $x \geq 0$.

Dies folgt aus $f'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$, was wir nun zeigen werden:

$f'(x) \geq 0$ | Ableitung ausführen (Arsinh via Tabelle)

$\iff \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x} \geq 0$ | Auf gemeinsamen Nenner bringen und zusammenfügen

$\iff \frac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(1+x)} \geq 0$ | $\cdot \sqrt{1+x^2}(1+x)$ [>0 da $x>-1$]

$\iff 1+x-\sqrt{1+x^2} \geq 0$ | $+\sqrt{1+x^2}$

$\iff 1+x \geq \sqrt{1+x^2}$ | $\square^2$ [beide Seiten ≥ 0 da $x > -1$]

$\iff \cancel{1} + 2x + \cancel{x^2} \geq \cancel{1} + \cancel{x^2}$ | $:2$

$\iff x \geq 0$

■

28) Sei f in $[a,b]$ differenzierbar und es gelte: $f(a) = 0$, $f(b) > 0$, $f'(b) < 0$

zz: $\exists c \in (a,b): f'(c) = 0$

Sei $\xi := f'(b) < 0$

$\xi = \lim_{x \to b^-} \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$

Def. Grenzwert: $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon < \varepsilon_0 : \left| \frac{f(b) - f(\cancel{x})^{b-\varepsilon}}{b - \cancel{x}_{(b-\varepsilon)}} - \xi \right| < |\xi|$

$\iff \left| \frac{f(b)-f(b-\varepsilon)}{\varepsilon} - \xi \right| < |\xi| = -\xi$

Betrag auflösen:

Fall 1:

$\frac{f(b)-f(b-\varepsilon)}{\varepsilon} < \xi < 0$ | $\cdot \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ | $+ f(b-\varepsilon)$

$f(b) < f(b-\varepsilon)$

Fall 2:

$\frac{f(b)-f(b-\varepsilon)}{\varepsilon} > \xi$

$\Rightarrow \left| \frac{f(b)-f(b-\varepsilon)}{\varepsilon} - \xi \right| = \frac{f(b)-f(b-\varepsilon)}{\varepsilon} - \xi < -\xi$ | $+\xi$

$\frac{f(b)-f(b-\varepsilon)}{\varepsilon} < 0$ | $\cdot \varepsilon$ | $+ f(b-\varepsilon)$

$f(b) < f(b-\varepsilon)$

28) Sei f in $[a,b]$ differenzierbar und es gelte:

$f(a) = 0, \; f(b) > 0, \; f'(b) < 0$

zz: $\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$

Da $[a,b]$ kompakt ist, nimmt f (differenzierbar $\Rightarrow$ stetig) darauf ein Maximum an. Dieses befindet sich entweder am Rand oder an einer Stelle $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = 0$.

Angenommen es befindet sich am Rand:

- bei a ist es nicht da $f(a) = 0 < f(b)$
- bei b ist es nicht da $f'(b) < 0$

$\Rightarrow$ es gibt <u>grössere</u> Funktionswerte leicht links von b $\lightning$

$\Rightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$ ∎

29) Seien f und g im Intervall I differenzierbar und es gelte:

$$f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$$

zz: $\forall a,b \in I$, Nullstellen von f : $\exists c \in (a,b) : g(c) = 0$

OBdA hat f zwischen a und b keine Nullstellen

Angenommen $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert $\forall x \in [a,b]$

$\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)} = 0$ da a,b Nullstellen von f.

$\overset{\text{Satz von Rolle}}{\Rightarrow} \exists c \in [a,b] : \left(\frac{f(c)}{g(c)}\right)' = 0$

$\Rightarrow 0 = \left(\frac{f(c)}{g(c)}\right)' = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}$ $\quad \Big| \cdot \underbrace{g(c)^2}_{\neq 0 \text{ laut Annahme}} \Big| \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow 0 = f(c)g'(c) - f'(c)g(c)$ $\lightning$ da $c \in [a,b] \subseteq I$

$\Rightarrow \exists c \in [a,b] : g(c) = 0$, zz: $c \in (a,b)$

Angenommen c ist am Rand von $[a,b]$, oBdA $c = a$

$\Rightarrow \underbrace{f(a)}_{0}g'(a) - f'(a)\underbrace{g(a)}_{0} = 0 - 0 = 0$ $\lightning$

$\Rightarrow \exists c \in (a,b) : g(c) = 0$ ∎