$\boxed{30}$ Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sinh(x)}{x(\cosh(x)-1)}$ $\begin{matrix} =: f(x) \\ =: g(x) \end{matrix}$

Es gilt $\sinh(0) = 0$, $\cosh(0) = 1$, also

$$f(0) = 0 - 0 = 0, \quad g(0) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{bzw. } \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}.$$

Weiters sind f und g auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Wir überprüfen, ob der Satz von Bernoulli de l'Hospital angewendet werden kann.

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \cosh(x), & [f'(0) = 0] \\ g'(x) &= (x\cosh(x) - x)' & \\ &= (\cosh(x) + x\sinh(x)) - 1, & [g'(0) = 1 + 0 - 1 = 0] \end{aligned}\right\} \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\left.\begin{aligned} f''(x) &= -\sinh(x) & [f''(0) = 0] \\ g''(x) &= \sinh(x) + (\sinh(x) + x\cosh(x)) & \\ &= 2\sinh(x) + x\cosh(x) & [g''(0) = 2\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0] \end{aligned}\right\} \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -\cosh(x) & [f'''(0) = -1] \\ g'''(x) &= 2\cosh(x) + (\cosh(x) + x\sinh(x)) & \\ &= 3\cosh(x) + x\sinh(x) & [g'''(0) = 3\cdot 1 + 0 = 3] \end{aligned}$$

Es existiert also der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'''(x)}{g'''(x)} = -\dfrac{1}{3}$ und daher gilt nach de l'Hospital

$$\underline{\underline{-\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \underline{\underline{\lim \frac{f(x)}{g(x)}}}$$

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^\alpha - 1}{\ln(x)} = „\frac{0}{0}"$

Wir verwenden wieder die l'Hospital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^\alpha - 1)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \to 1} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x}$$

$$= \lim_{x \to 1} \alpha \overbrace{x^\alpha}^{\to 1} = \underline{\underline{\alpha}}$$ (gw existiert ✓)

$$\overset{\text{die l'H}}{=} \underline{\underline{\lim_{x \to 1} \frac{x^\alpha - 1}{\ln(x)}}}$$

$\boxed{3.1}$ Bestimmen Sie das 5te Taylorpolynom von $f(x) = \tan(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

Das fünfte Taylorpolynom an der Stelle $x_0 = 0$ ist

$$T_5(f, x, 0) = \sum_{k=0}^{5} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Um die ersten fünf Ableitungen von von $\tan(x)$ zu berechnen, bestimmen wir zunächst die Ableitung von $\tan^n(x) = \tan(x)^n$ für $n \in \mathbb{N}$:

$$(\tan(x)^n)' \overset{\text{Kettenregel}}{=} n \tan(x)^{n-1} \cdot \tan'(x)$$

$$= n \tan(x)^{n-1} (1 + \tan(x)^2)$$

$$= n (\tan(x)^{n-1} + \tan(x)^{n+1})$$

Also zB $(\tan^3(x))' = 3(\tan^2(x) + \tan^4(x))$

$(\tan^4(x))' = 4(\tan^3(x) + \tan^5(x))$ ... usw

Nun können wir einfach die höheren Ableitungen von tan(x) bei.:

$$f(x) = \tan(x) \qquad \Rightarrow f^{(0)}(0)=0$$

$$f'(x) = 1+\tan^2(x) \qquad \Rightarrow f^{(1)}(0)=1$$

$$f^{(2)}(x) = 0 + (\tan^2(x))'$$
$$= 2(\tan(x)+\tan^3(x)) = 2\tan(x)+2\tan^3(x)$$
$$\Rightarrow f^{(2)}(0)=0$$

$$f^{(3)}(x) = 2(\tan(x))' + 2(\tan^3(x))'$$
$$= 2(1+\tan^2(x)) + 2\cdot 3(\tan^2(x)+\tan^4(x))$$
$$= 2+8\tan^2(x)+6\tan^4(x) \qquad \Rightarrow f^{(3)}(0)=2$$

$$f^{(4)}(x) = 0 + \overbrace{8\cdot 2}^{16}(\tan(x)+\tan^3(x)) + \overbrace{6\cdot 4}^{24}(\tan^3(x)+\tan^5(x))$$
$$= 16\tan(x)+40\tan^3(x)+24\tan^5(x) \qquad \Rightarrow f^{(4)}(0)=0$$

$$f^{(5)}(x) = 16(1+\tan^2(x)) + \text{höhere potenzen von tan}$$
$$= 16 + 16\tan^2 + \underbrace{\text{höhere potenzen von tan}}_{=0 \text{ für } x=0} \qquad \Rightarrow f^{(5)}(0)=16$$

Wir können nun alles in die Formel für T_5 einsetzen

$$T_5(f,x,0) = \frac{0}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{16}{5!}x^5$$

$$= x + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 3}x^3 + \frac{\cancel{16}\,2}{\cancel{2}\cdot 3\cdot \cancel{4}\cdot 5}x^5$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$$

$\boxed{32}$ Diskutieren Sie die folgenden Funktionen

(a) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2} = \sqrt[3]{x^3+3x^2+4}$

1. Definitionsbereich, Stetigkeit und Ableitungen

- f ist definiert auf ganz $\mathbb{R}$, also $D_f = \mathbb{R}$
- f ist stetig auf $\mathbb{R}$ und differenzierbar auf $\mathbb{R}\setminus\{1,-2\}$

Für $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-2\}$ gilt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{3}\left((x-1)(x+2)^2\right)^{-2/3} \cdot \left[x^3+3x^2+4\right]' \\
&= \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}(x+2)^{-4/3}(3x^2+6x) \\
&= \frac{1}{\cancel{3}}(x-1)^{-2/3}(x+2)^{-4/3} \cdot \cancel{3}x(x+2) \\
&= x\,(x-1)^{-2/3}(x+2)^{-4/3+1} \\
&= x\,(x-1)^{-2/3}(x+2)^{-1/3} = \frac{x}{(x-1)^{2/3}(x+2)^{1/3}}
\end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-2\}$ ist f' differenzierbar. Für die Ableitung verwenden wir die folgende Produktregel:

$$\begin{aligned}
(uvw)' &= (uv)'w + uvw' = (u'v+uv')w + uvw' \\
&= u'vw + uv'w + uvw'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= (x-1)^{-2/3}(x+2)^{-1/3} + \left(-\frac{2}{3}\right)x(x-1)^{-5/3}(x+2)^{-1/3} \\
&\quad + \left(-\frac{1}{3}\right)x(x-1)^{-2/3}(x+2)^{-4/3} \\
&= (x-1)^{-5/3}(x+2)^{-4/3}\left((x-1)(x+2) - \frac{2}{3}x(x+2) - \frac{1}{3}x(x-1)\right) \\
&= (x-1)^{-5/3}(x+2)^{-4/3}\left(\cancel{x^2} + \cancel{x} - 2 - \cancel{\frac{2}{3}x^2} - \cancel{\frac{4}{3}x} - \cancel{\frac{1}{3}x^2} + \cancel{\frac{1}{3}x}\right) \\
&= -2\,(x-1)^{-5/3}(x+2)^{-4/3} = \frac{-2}{(x-1)^{5/3}(x+2)^{4/3}}
\end{aligned}$$

$$f'''(x) = -2\left(-\frac{5}{3}(x-1)^{-8/3}(x+2)^{-4/3} - \frac{4}{3}(x-1)^{-5/3}(x+2)^{-7/3} \right)$$

$$= -2(x-1)^{-8/3}(x+2)^{-7/3}\underbrace{\left(-\frac{5}{3}(x+2) - \frac{4}{3}(x-1)\right)}_{-\frac{9}{3}x - \frac{10}{3} + \frac{4}{3} = -3x-2}$$

$$= 2(3x+2)(x-1)^{-8/3}(x+2)^{-7/3}$$

$$= \frac{2(3x+2)}{(x-1)^{8/3}(x+2)^{7/3}}$$

2. Nullstellen

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1,-2\}$$

Also ist $N_f = \{1,-2\}$.

3. Extrema & Monotonie

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-2\}$ gilt

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$f''(0) = \frac{-2}{(-1)^{5/3}\, 2^{4/3}} = \frac{-2}{(-1)\, 2^{4/3}} > 0$$

$\Rightarrow$ f hat ein lokales minimum bei $x = 0$.

Die punkte $x = 1$ und $x = -2$ müssen wir extra analysieren, da f an diesen Stellen nicht differenzierbar ist.

Für $\forall x \in (-\infty, -2)$ gilt

$$f'(x) = \frac{\overset{<0}{x}}{\underbrace{(x-1)^{2/3}}_{>0}\underbrace{(x+2)^{1/3}}_{<0}} > 0 \Rightarrow f \text{ streng mon. steigend auf } (-\infty, -2)$$

Für $x \in (-2, 0)$ gilt

$$f'(x) = \frac{\overset{<0}{x}}{\underbrace{(x-1)^{2/3}}_{>0}\underbrace{(x+2)^{1/3}}_{>0}} < 0 \Rightarrow f \text{ streng mon. fallend auf } (-2, 0)$$

Daraus folgt, dass f ein lokales Maximum bei $x = -2$ hat.

Für $x \in (0,1) \cup (1, \infty)$

$$f'(x) = \frac{\overset{>0}{x}}{\underbrace{(x-1)^{2/3}}_{>0}\underbrace{(x+2)^{1/3}}_{>0}} > 0 \Rightarrow f \text{ ist } \cancel{\text{mo}} \text{ streng monoton wachsend auf } (0, \infty)$$

(Also hat f kein Extremum bei $x = 1$)

4. Wendepunkte & Krümmung

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ gilt

$$f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^{5/3}(x+2)^{4/3}} \neq 0$$

Es gibt daher keine Wendepunkte in $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

Wir haben ~~...~~

$f''(x) > 0$ für $x \in (-\infty, -2) \Rightarrow f$ konvex auf $(-\infty, -2)$

$f''(x) > 0$ für $x \in (-2, 1) \Rightarrow f$ konvex auf $(-2, 1)$

$f''(x) < 0$ für $x \in (1, \infty) \Rightarrow f$ konkav auf $(1, \infty)$

$x = -2$ kommt als Wendepunkt nicht infrage

(Achtung! f ist nicht konvex auf $(-\infty, 1)$!)

Es gilt außerdem $\lim\limits_{x \to 1+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1-} f'(x) = \infty$

Also hat f an der Stelle $x=1$ eine Tangente („Steigung ∞")
und wechselt bei $x=1$ ~~das~~ Krümmungsverhalten.
$\Rightarrow$ f „durchdringt" bei $x=1$ seine Tangente
$\Rightarrow$ $x=1$ ist ein Wendepunkt.

5. Verhalten am Rand des Def. Bereiches, Asymptoten

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

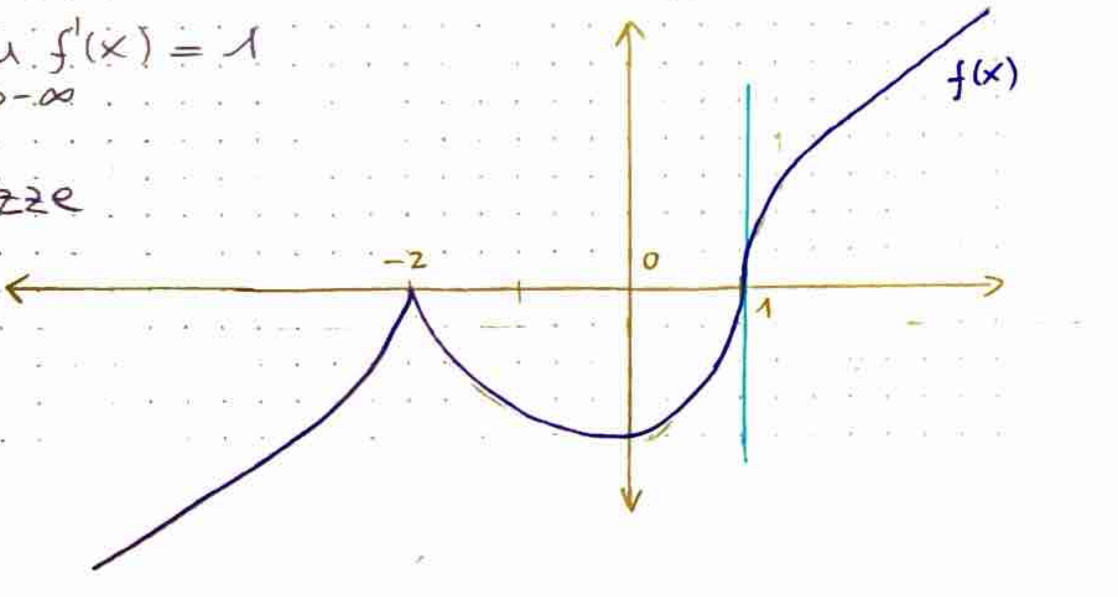
$$\lim_{x \to \infty} f'(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{(x-1)^{2/3}(x+2)^{1/3}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x^{2/3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2/3} \cancel{x^{1/3}}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/3}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x \to \infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2/3} \cdot \lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/3}} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = 1$$

6. Skizze



b) $f(x) = x^3 e^{-x^2/2}$

1. Definitionsbereich : $D_f = \mathbb{R}$

f ist stetig und differenzierbar. Es gilt

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x^2/2} + x^3 e^{-x^2/2}(-x)$$
$$= (3x^2 - x^4) e^{-x^2/2}$$

$$f''(x) = (6x - 4x^3) e^{-x^2/2} + (3x^2 - x^4) e^{-x^2/2}(-x)$$
$$= (6x - 4x^3 - 3x^3 + x^5) e^{-x^2/2}$$
$$= (6x - 7x^3 + x^5) e^{-x^2/2}$$

$$f'''(x) = (6 - 21x^2 + 5x^4) e^{-x^2/2} + (6x - 7x^3 + x^5) e^{-x^2/2} (-x)$$
$$= (6 - 21x^2 + 5x^4 - 6x^2 + 7x^4 - x^6) e^{-x^2/2}$$
$$= (6 - 27x^2 + 12x^4 - x^6) e^{-x^2/2}$$

2. Nullstellen. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow N_f = \{0\}$

3. Extremstellen : Punkte die infrage kommen :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x^4 = x^2(3 - x^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x \in \{0, \pm\sqrt{3}\}$$

$f''(0) = 0 \rightarrow$ Wendepunkt

$f''(-\sqrt{3}) = 2.31... > 0 \rightarrow$ lokales Minimum

$f''(\sqrt{3}) = -2.31... < 0 \rightarrow$ lokales Maximum

$$\left(\begin{array}{l} f(-\sqrt{3}) = 1.159... \\ f(\sqrt{3}) = -1.159... \\ \sqrt{3} = 1.732... \end{array} \right)$$

4. Wendepunkte

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x^5-7x^3+6x = x(x^4-7x^2+6)=0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1, \pm\sqrt{6}\}$$

$$\left[\text{NR: } x^2 = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \underbrace{6}_{\frac{24}{4}}} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{12}{2} = 6 \end{cases} \quad \Rightarrow x \in \{\pm 1, \pm\sqrt{6}\}\right]$$

$f'''(x) \neq 0$ für $x \in \{0, \pm 1, \pm\underbrace{\sqrt{6}}_{=2.449\ldots}\}$ → alle sind Wendepunkte

$f'(0) = 0$ → Steigung der Tangente beim Wendep. $x=0$

$f'(1) = f'(-1) = 2e^{-1/2} = 1.213\ldots$ → Steigung bei $x = \pm 1$

$f'(\sqrt{6}) = f'(-\sqrt{6}) = -18e^{-3} = -0.896\ldots$ → Steigung bei $x = \pm\sqrt{6}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

5. Monotonie

$f'(x) < 0$ auf $(-\infty, -\sqrt{3})$ → fallend

$f'(x) \geqslant 0$ auf $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ → steigend

$f'(x) < 0$ auf $(\sqrt{3}, \infty)$ → fallend

6. Krümmung

$f''(x) < 0$ auf $(-\infty, -\sqrt{6})$ → konkav

> 0 auf $(-\sqrt{6}, -1)$ → konvex

< 0 auf $(-1, 0)$ → konkav

> 0 auf $(0, 1)$ → konvex

< 0 auf $(1, \sqrt{6})$ → konkav

> 0 auf $(\sqrt{6}, \infty)$ → konvex

8. Skizze