

33. Zerlegen Sie die folgenden rationalen Funktionen in Partialbrüche und bestimmen Sie deren Stammfunktionen:

$$(a) R(x) = \frac{7x^3 + x^2 - 3x - 1}{(x+1)^2(x^2+1)} \quad (b) R(x) = \frac{x^4 - x^3 + 5x^2 + 2x - 40}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}$$

$$(c) R(x) = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 + x^2}$$

a) Man sieht, dass der Nenner von R Nullstellen bei $x = \pm i$, sowie eine doppelte Nullstelle bei $x = -1$ hat.

Wir machen also den Ansatz:

$$R(x) \stackrel{!}{=} \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad B &= (x+1)^2 R(x) \Big|_{x=-1} = \frac{7x^3 + x^2 - 3x - 1}{x^2+1} \Big|_{x=-1} \\ &= \frac{-7+1+3-1}{2} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad Cx+D &= (x^2+1) R(x) \Big|_{x=i} = \frac{7x^3 + x^2 - 3x - 1}{(x+1)^2} \Big|_{x=i} \\ &= \frac{-7i - 1 - 3i - 1}{-1 + 2i + 1} = \frac{-2 - 10i}{2i} = i - 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{C = 1}, \quad \underline{D = -5}$$

$$\bullet \quad (x+1)^2 R(x) = A(x+1) + B + (x+1)^2 \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \frac{d}{dx} (x^2+1) R(x) \Big|_{x=-1} = \frac{d}{dx} \frac{7x^3 + x^2 - 3x - 1}{x^2+1} \Big|_{x=-1} \\ &= \frac{(21x^2 + 2x - 3)(x^2+1) - 2x(7x^3 + x^2 - 3x - 1)}{(x^2+1)^2} \Big|_{x=-1} \\ &= \frac{(21 - 2 - 3) \cdot 2 + 2(-7 + 1 + 3 - 1)}{4} = \frac{16 - 8}{4} = 2 \end{aligned}$$

$$= \frac{(x^2+1)^4 \cdot (21-2-3) \cdot 2 + 2(-7+1+3-1)}{4} = \underline{\underline{6}} \quad 'x = -1$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{6}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{x-5}{x^2+1}$$

Damit lässt sich $R(x)$ integrieren:

$$\int R(x) dx = \int \frac{6}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{x-5}{x^2+1} dx$$

$$\cdot \int \frac{6}{x+1} dx = 6 \ln|x+1|$$

$$\cdot \int \frac{-2}{(x+1)^2} dx = -2 \int \frac{1}{(x+1)^2} = -2 \cdot \frac{-1}{x+1} = \frac{2}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \cdot \int \frac{x-5}{x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - 5 \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - 5 \arctan(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int R(x) dx = 6 \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - 5 \arctan(x) + \frac{2}{x+1} + C$$

b) Da der Zählergrad größer als der Nennergrad ist, führen wir zuerst eine Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3 + 5x^2 + 2x - 40 : (x^3 - 3x^2 + 4x - 12) = x + 2 \\ \underline{-x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 12x} \\ 2x^3 + x^2 + 14x - 40 \\ \underline{-2x^3 + 6x^2 - 8x + 24} \\ 7x^2 + 6x - 16 \end{array}$$

$$\Rightarrow R(x) = x + 2 + \frac{7x^2 + 6x - 16}{\underbrace{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}_{=: D(x)}}$$

$$\underbrace{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}_{=: p(x)}$$

Wir betrachten nun den überbleibenden rationalen Term $q(x)$.
Durch geschicktes Raten sieht man, dass der Nenner eine Nullstelle bei $x = 3$ hat.

Polynomdivision ergibt dann:

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 4x - 12 : (x - 3) = x^2 + 4 \\ \underline{-x^3 + 3x^2} \\ 0 + 4x \\ \underline{-4x + 12} \\ 0 \end{array}$$

Damit sind die anderen beiden Nullstellen bei $x = \pm 2i$.
Wir machen also den Ansatz:

$$p(x) \stackrel{!}{=} \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\begin{aligned} \circ A &= (x-3) p(x) \Big|_{x=3} = \frac{7x^2 + 6x - 16}{x^2 + 4} \Big|_{x=3} \\ &= \frac{63 + 18 - 16}{13} = \frac{65}{13} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circ 2iB + C &= (x^2 + 4) p(x) \Big|_{x=2i} = \frac{7x^2 + 6x - 16}{x-3} \Big|_{x=2i} \\ &= \frac{-28 + 12i - 16}{2i-3} = \frac{12i-44}{2i-3} = \frac{(12i-44)(2i+3)}{-4-9} \\ &= \frac{-24 - 88i + 36i - 132}{-13} = \frac{156 + 52i}{13} = 12 + 4i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = 2, C = 12$$

$$\Rightarrow R(x) = x + 2 + \frac{5}{x-3} + \frac{2x+12}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow R(x) = x + 2 + \frac{5}{x-3} + \frac{2x+12}{x^2+4}$$

Damit lässt sich $R(x)$ integrieren:

$$\int R(x) dx = \int x + 2 + \frac{5}{x-3} + \frac{2x+12}{x^2+4} dx$$

$$\circ \int x + 2 dx = \frac{x^2}{2} + 2x + c$$

$$\circ \int \frac{5}{x-3} dx = 5 \ln|x-3|$$

$$\circ \int \frac{2x+12}{x^2+4} dx = \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \int \frac{12}{x^2+4} dx$$

$$= \ln|x^2+4| + 3 \int \frac{1}{\frac{x^2}{4}+1} dx$$

$$= \ln|x^2+4| + 3 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot 2$$

subst $\frac{x}{2} = u$
 $\Rightarrow dx = 2 du$

$$\Rightarrow \int R(x) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 5 \ln|x-3| + \ln|x^2+4| + 6 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

c) Da der Zählergrad größer als der Nennergrad ist, führen wir als erstes eine Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{r} x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1 : (x^4 + x^2) = x - 2 \\ -x^5 -x^3 \\ \hline -2x^4 + x^3 - x^2 - x + 1 \\ + 2x^4 + 2x^2 \\ \hline x^3 + x^2 - x + 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow R(x) = x - 2 + \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^4 + x^2}$$

$$= x - 2 + \frac{x^2 - 1}{x(x^2+1)} + \frac{1}{x^2}$$

$$= x-2 + \underbrace{\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}}_{=: p(x)} + \frac{1}{x^2}$$

Wir betrachten nun den rationalen Term $p(x)$. Dieser hat im Nenner offensichtlich die Nullstellen $x=0$ und $x=\pm i$. Wir machen also den Ansatz:

$$p(x) \stackrel{!}{=} \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\circ A = p(x) \cdot x \Big|_{x=0} = \frac{x^2-1}{x^2+1} \Big|_{x=0} = -1$$

$$\circ Bx+C = p(x)(x^2+1) \Big|_{x=i} = \frac{x^2-1}{x} \Big|_{x=i} \\ = \frac{-2}{i} = 2i$$

$$\Rightarrow B=2, C=0$$

$$\Rightarrow R(x) = x-2 - \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2}$$

Wir können nun $R(x)$ integrieren:

$$\int R(x) dx = \int x-2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$\circ \int x-2 dx = \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

$$\circ \int -\frac{1}{x} dx = -\ln|x|$$

$$\circ \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$$

$$\circ \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln|x^2+1|$$

$$\Rightarrow \int R(x) dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x^2+1| + c.$$

34. Formen Sie das Integral

$$\int [u(x)v''(x) - v(x)u''(x)] dx$$

für zweimal differenzierbare Funktionen u, v um.

Wir nutzen partielle Integration:

$$\bullet \int u(x)v''(x) dx = u(x)v'(x) - \int u'(x)v'(x) dx$$

$$\bullet \int v(x)u''(x) dx = v(x)u'(x) - \int v'(x)u'(x) dx$$

Damit folgt:

$$\int [u(x)v''(x) - v(x)u''(x)] dx$$

$$= u(x)v'(x) - \int u'(x)v'(x) dx - v(x)u'(x) + \int u'(x)v'(x) dx$$

$$= u(x)v'(x) - v(x)u'(x)$$

35. Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

(a) $\int x^3 \ln(x) dx$

(b) $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$ (Hinweis: $x = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})$)

(c) $\int \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} dx$

(d) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$ (Hinweis: $t = x^2 + 2x + 2$)

(e) $\int \operatorname{Arsinh}(x) dx$

a) $\int x^3 \ln(x) dx$

Wir nutzen partielle Integration:

$$\Rightarrow \int x^3 \ln(x) dx = \frac{x^4}{4} \ln(x) - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln(x) - \frac{1}{4} \int x^3 dx$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln(x) - \frac{x^4}{16} + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{x^4}{4} \left(\ln(x) - \frac{1}{4} \right) + C}}$$

b) $\int \sqrt{x^2+1} dx$

Wir beobachten, dass:

$$\frac{1}{4} \left(t - \frac{1}{t} \right)^2 + 1 = \frac{1}{4} \left(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2} \right) + 1$$

$$\frac{1}{4} \left(t - \frac{1}{t} \right)^2 + 1 = \frac{1}{4} \left(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2} \right) + 1$$

$$= \frac{t^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4t^2} = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2t} \right)^2$$

Mit der Substitution:

$$x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{2} \frac{t^2 - 1}{t}$$

$$dx = \frac{1}{2} \frac{2t^2 - t^2 + 1}{t^2} dt = \frac{1}{2} \frac{t^2 + 1}{t^2} dt = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt.$$

erhalten wir:

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \int \sqrt{\frac{1}{4} \left(t - \frac{1}{t} \right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{2} \frac{t^2 + 1}{t^2} dt$$

$$= \int \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2t} \right) \frac{1}{2} \frac{t^2 + 1}{t^2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{t^2 + 1}{t} \cdot \frac{t^2 + 1}{t^2} dt$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} dt$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{t^2}{2} + 2 \ln|t| - \frac{1}{2} \frac{1}{t^2} \right]$$

$$= \frac{1}{8} \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) + \frac{1}{2} \ln|t|$$

Nun verwenden wir:

$$\sqrt{x^2 + 1} + x = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) = t$$

$$x \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{4} \left(t - \frac{1}{t} \right) \left(t + \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{4} \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right)$$

und erhalten:

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln |\sqrt{x^2 + 1} + x| + C$$

c) $\int \frac{\sin(x)}{x} dx$

$$c) \int \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} dx$$

Wir verwenden die Substitution:

$$1 - \cos(x) = t$$

$$\sin(x) dx = dt$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} dx &= \int \frac{1}{t} dt \\ &= \ln |t| = \underline{\underline{\ln |1 - \cos(x)|}} + C \end{aligned}$$

$$d) \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$$

Wir substituieren:

$$x^2 + 2x + 2 = t$$

$$(2x+2) dx = dt$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{t} + C = \underline{\underline{\sqrt{x^2+2x+2}}} + C \end{aligned}$$

$$e) \int \operatorname{Arsinh}(x) \, dx$$

Es gilt: $\operatorname{Arsinh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Mit part. Integration folgt also:

$$\int \operatorname{Arsinh}(x) \, dx = x \cdot \operatorname{Arsinh}(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx + C$$

Für das hintere Integral substituieren wir

$$1+x^2 = t$$

$$2x \, dx = dt$$

und erhalten:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt = \sqrt{t} = \sqrt{x^2+1}.$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{Arsinh}(x) \, dx = x \operatorname{Arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1} + C.$$