

36) a) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 + 4 \cdot \cos(x)}$ ← Keine "leichte" Substitution möglich um lösbares Integral zu erhalten, daher wird Weierstrass-Substitution genutzt, i.e. $u = \tan(x/2)$

Mit dieser Substitution gilt stets

$$\begin{aligned} u &= \tan\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow du = \frac{1}{2}(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)) dx \\ &\Leftrightarrow dx = \frac{2}{1+u^2} du, \\ \sin(x) &= \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse dürfen ohne Herleitung aus Skript verwendet werden. Für unser Integral folgt somit

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{5 + 4 \cdot \cos(x)} dx = \int_{\tan(0/2)}^{\tan(\pi/4)} \frac{1}{\left(5 + 4 \cdot \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\right)} \cdot \frac{2}{(1+u^2)} du$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{5 \cdot (1+u^2) + 4 \cdot (1-u^2)} du = \int_0^1 \frac{2}{9 + u^2} du$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \int_0^1 \frac{du}{1 + \left(\frac{u}{3}\right)^2} \stackrel{\substack{\uparrow \\ z = u/3, du = 3 \cdot dz}}{=} \frac{2}{9} \cdot \int_0^{1/3} \frac{1}{1 + z^2} \cdot 3 \cdot dz$$

$$= \frac{6}{9} \cdot \left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \underbrace{\arctan(0)}_{=0} \right) = \underline{\underline{\frac{2}{3} \cdot \arctan\left(\frac{1}{3}\right)}}$$

b) $\int_0^{\pi} \sin(x)^2 dx \rightarrow 2 \text{ Möglichkeiten}$

I. Strategie: Partielle Integration

$$\int_0^{\pi} \sin(x) \sin(x) dx = \underbrace{-\sin(x) \cdot \cos(x)}_{=0} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos(x)) \cdot \cos(x) dx$$

Somit gilt $\int_0^{\pi} \sin(x)^2 dx = \int_0^{\pi} \cos(x)^2 dx$. Definiere nun $I = \int_0^{\pi} \sin(x)^2 dx$ und nutze $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ wie folgt:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \sin(x)^2 dx = \int_0^{\pi} \cos(x)^2 dx \\ &= \int_0^{\pi} (1 - \sin(x)^2) dx = \int_0^{\pi} 1 dx - \int_0^{\pi} \sin(x)^2 dx \\ &= \pi - I \end{aligned}$$

Also $I = \pi - I \Leftrightarrow 2I = \pi \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{2}$.

Haben also gezeigt, dass

$$\int_0^{\pi} \sin(x)^2 dx = \pi/2$$

II. Strategie: Umschreiben + Substitution

Laut VO ist bekannt, dass

$$1 = \cos(x)^2 + \sin(x)^2,$$

$$\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$$

$$\Rightarrow 1 - \cos(2x) = 2 \cdot \sin(x)^2 \Leftrightarrow \sin(x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Damit folgt fürs Integral

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin(x)^2 dx &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^{\pi} 1 dx - \int_0^{\pi} \cos(2x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\pi - \int_0^{2\pi} \cos(u) \cdot \frac{du}{2} \right) \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{Nutze } u = 2x \\ \Rightarrow dx = \frac{du}{2} \end{array} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cdot \left(\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(0)}_{=0} \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}} \end{aligned}$$

Analysis T1

UE 9

c) $\int_0^2 \frac{x}{x^3+8} dx \rightarrow$ Keine Tricks oder einfache Substitutionen möglich, also nutze Partialbruchzerlegung

Nullstellen des Nenners: $x_1 = -2$ leicht zu erraten, für Rest nutze Polynomdivision

$$\begin{array}{r} (x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 8) : (x + 2) = x^2 - 2x + 4 \\ - (x^3 + 2x^2) \\ \hline -2x^2 + 0 \cdot x \\ - (-2x^2 - 4x) \\ \hline 4x + 8 \\ - (4x + 8) \\ \hline 0 \end{array}$$

OR

$= (x-1)^2 + 3 \geq 3$,
also keine weiteren reellen Nullstellen, sondern konjugiert komplexe Nullstellen.

Also gilt $(x^3+8) = (x+2)(x^2-2x+4)$, daher suchen wir $A, B, C \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^3+8} &= \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} \\ &= \frac{x^2(A+B) + x(-2A+2B+C) + (4A+2C)}{x^3+8} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergl. der Zählerpolynome liefert

$$\begin{array}{l} \text{I: } A+B=0 \\ \text{II: } -2A+2B+C=1 \\ \text{III: } 4A+2C=0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} A=-B \\ \text{I': } 4B+C=1 \\ \text{II': } -4B+2C=0 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} A=-B \\ 4B+C=1 \\ -4B+2C=0 \end{array}} \right\} 3C=1$$

also $C = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $B = \frac{1}{6}$, $A = -\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{x}{x^3+8} &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{x+2}{x^2-2x+4} - \frac{1}{x+2} \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{x-1}{x^2-2x+4} + \frac{3}{x^2-2x+4} - \frac{1}{x+2} \right) \end{aligned}$$

Nun gilt für die 3 Integrale jeweils

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x+4} dx \stackrel{\substack{u=x^2-2x+4 \\ du=2(x-1)dx}}{=} \int \frac{x-1}{u} \cdot \frac{du}{2(x-1)} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \\ = \frac{1}{2} \cdot \ln|u| + C \\ = \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2-2x+4| + C$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{x-1}{x^2-2x+4} dx = \frac{1}{2} \cdot (\ln|2^2-2 \cdot 2+4| - \ln|0^2-2 \cdot 0+4|) \\ = \frac{1}{2} \cdot (\ln(4) - \ln(4)) = \underline{\underline{0}}$$

$$\int_0^2 \frac{3}{x^2-2x+4} dx = \int_0^2 \frac{3}{(x-1)^2+3} dx = \int_0^2 \frac{1}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} dx \\ v = \frac{x-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow dx = \sqrt{3} \cdot dv \\ \Rightarrow v(0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad v(2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{v^2+1} \cdot \sqrt{3} \cdot dv \\ = \sqrt{3} \cdot \arctan(v) \Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

arctan(v) ungerade Fkt. $\Rightarrow$

$$= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{x+2} dx = \ln|x+2| \Big|_0^2 = \ln(4) - \ln(2) \\ = 2 \cdot \ln(2) - \ln(2) = \underline{\underline{\ln(2)}}$$

Somit folgt insgesamt für das ursprüngliche Integral

$$\int_0^2 \frac{x}{x^3+8} dx = \frac{1}{6} \cdot \left(\int_0^2 \frac{x-1}{x^2-2x+4} dx + \int_0^2 \frac{3}{x^2-2x+4} dx - \int_0^2 \frac{1}{x+2} dx \right) \\ = \frac{1}{6} \cdot \left(0 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln(2) \right) \\ = \underline{\underline{\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln(2) \right)}}$$

d) $\int_0^1 x^2 \cdot \ln(x)^3 dx$ ← Nutze mehrmals partielle Integration bis $\ln(x)$ verschwindet

$$\begin{aligned} \rightarrow \int_0^1 x^2 \cdot \ln(x)^3 dx &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln(x)^3 \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} \cdot 3 \cdot \ln(x)^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\ln(1)^3}_{=0} - \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot \ln(x)^3}{3} \right) - \int_0^1 x^2 \cdot \ln(x)^2 dx \end{aligned}$$

Für untere Grenze nutzen wir L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot \ln(x)^3}{3} &= \frac{1}{3} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x) \right)^3 \leftarrow = "0 \cdot \infty" \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \right)^3 \leftarrow = " \frac{\infty}{\infty} " \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right)^3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} (-x) \right)^3 = \frac{0^3}{3} = 0 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \cdot \ln(x)^3 dx &= - \int_0^1 x^2 \cdot \ln(x)^2 dx \\ &= \frac{-x^3}{3} \cdot \ln(x)^2 \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^3}{3} \cdot 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \underbrace{-\frac{1}{3} \cdot \ln(1)^3}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3}{3} \cdot \ln(x)^2 \right)}_{=0} + \frac{2}{3} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot \ln(x) dx \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x) \right)^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot 0^2 = 0 \end{aligned}$$

Schließlich bekommt man also

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \cdot \ln(x)^3 dx &= \frac{2}{3} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot \ln(x) dx = \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\underbrace{\frac{1^3}{3} \cdot \ln(1)}_{=0} - \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot \ln(x)}{3}}_{=0} - \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx \right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} = \underline{\underline{-\frac{2}{27}}} \end{aligned}$$

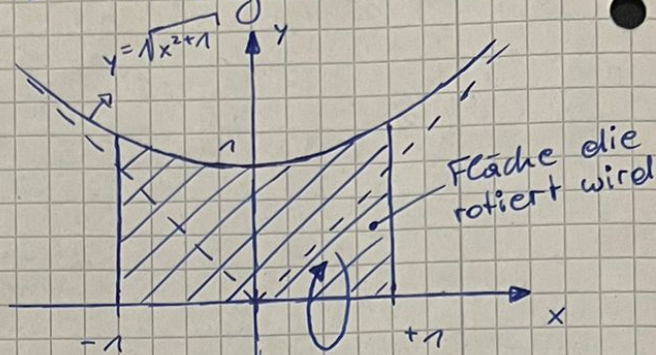
37) Rotiere $y^2 - x^2 = 1$ um x -Achse und finde Volumen, wobei $-1 \leq x \leq 1$, $y > 0$ vorausgesetzt wird bei der Kurve.

Laut VO gilt für solche Rotationsvolumen:

$$V_{\text{rot}} = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_{-1}^1 (\sqrt{x^2 + 1})^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_{-1}^1 \underbrace{|x^2 + 1|}_{\substack{\text{ohnehin} \\ \text{positiv } \forall x \in [-1, 1]}} dx = \pi \cdot \int_{-1}^1 x^2 + 1 dx$$



Integrand ist gerade Fkt., Intervall symmetrisch

$$\Rightarrow V_{\text{rot}} = \pi \cdot \int_{-1}^1 x^2 + 1 dx = 2\pi \cdot \int_0^1 x^2 + 1 dx$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = \underline{\underline{\frac{8\pi}{3}}}$$

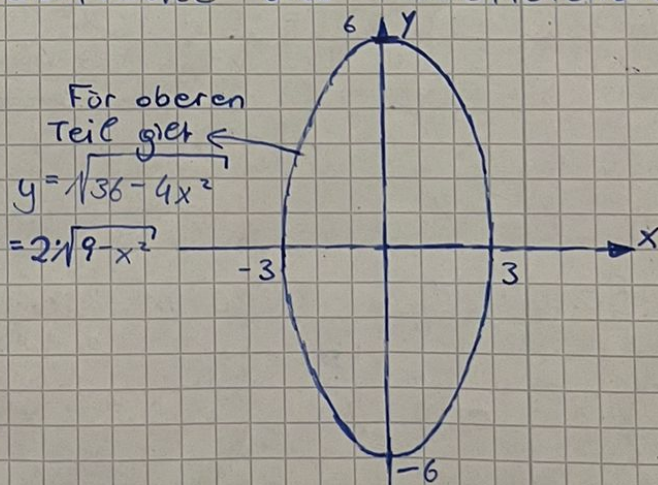
38) Die Ellipse $4x^2 + y^2 = 36$ rotiere um die x -Achse. Finde Volumen und Oberfläche des resultierenden Rotationskörpers.

$$V_{\text{rot}} = \pi \cdot \int_{-3}^3 f(x)^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_{-3}^3 4 \cdot |9 - x^2| dx$$

Intervall
symm.
& Fkt.
gerade

$$= 2\pi \cdot \int_0^3 4 \cdot (9 - x^2) dx$$



$$= 8\pi \cdot \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 8\pi \cdot \left(27 - \frac{27}{3} \right) = 8 \cdot 18 \cdot \pi = \underline{\underline{144\pi}}$$

Für die Oberfläche gilt hingegen et. VO

$$O_{\text{rot}} = 2\pi \cdot \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot f(x) dx$$

Bei uns gilt $a = -3$, $b = 3$, $f(x) = 2 \cdot \sqrt{9 - x^2}$
und somit

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{9 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{9 - x^2}} = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{9 - x^2}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot f(x) &= \sqrt{1 + \frac{4x^2}{9 - x^2}} \cdot 2\sqrt{9 - x^2} \\ &= 2 \cdot \sqrt{9 - x^2 + 4x^2} \\ &= 2 \cdot \sqrt{9 + 3x^2} \end{aligned}$$

Somit gilt

$$O_{\text{rot}} = 2\pi \cdot \int_{-3}^3 2 \cdot \sqrt{9 + 3x^2} dx$$

ger. Fkt. $\Rightarrow$ $8\pi \cdot \int_0^3 \sqrt{9 + 3x^2} dx = 3 \cdot 8\pi \cdot \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} dx$
& sym. Intervall

Substitution $\Rightarrow$ $24\pi \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + u^2} \cdot \sqrt{3} \cdot du$
 $u = \frac{x}{\sqrt{3}}, dx = \sqrt{3} du$

$u(0) = 0, u(3) = \sqrt{3}$
 $= 24 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + u^2} du$

Aufgabe 35b) von UE 9 $\Rightarrow$ $24 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \left(\frac{1}{2} \cdot u \cdot \sqrt{u^2 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \ln |\sqrt{u^2 + 1} + u| \right) \Big|_0^{\sqrt{3}}$

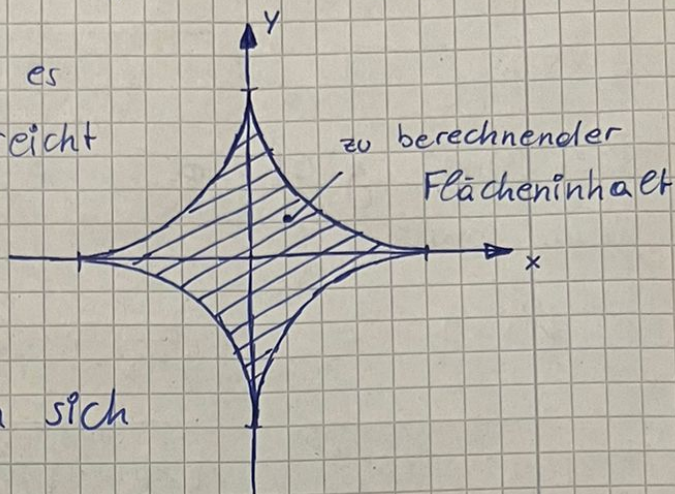
$$= \frac{24 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi}{2} \cdot \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 + 1} + \ln(\sqrt{3 + 1} + \sqrt{3}) \right)$$

$$= \underline{\underline{72 \cdot \pi + 12 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot \ln(2 + \sqrt{3})}}$$

39) Berechne die von Asteroide eingeschlossene Fläche

Asteroide: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1, -1 \leq x, y \leq 1$

Wir bemerken zuerst, dass es aufgrund der Symmetrien reicht die Fläche für $x, y \geq 0$ zu berechnen und mit 4 zu multiplizieren. Für diesen Flächenteil bieten sich 2 Möglichkeiten an.



I. Strategie: Leibniz'sche Sektorformel

Nutze Parametrisierung $x(t) = \cos(t)^3, y(t) = \sin(t)^3$ und Sektorformel

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t) \cdot \dot{y}(t) - \dot{x}(t) \cdot y(t) dt$$

Symmetrie-
argument
von zuvor

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(t)^3 \cdot (3 \cdot \sin(t)^2 \cdot \cos(t)) - (-3 \cdot \cos(t)^2 \cdot \sin(t)) \cdot \sin(t)^3 dt \\ &= 2 \cdot \int_0^{\pi/2} 3 \cdot \cos(t)^2 \cdot \sin(t)^2 \cdot \underbrace{(\cos(t)^2 + \sin(t)^2)}_{=1} dt \\ &= 6 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(t)^2 \cdot \sin(t)^2 dt \end{aligned}$$

Nun wurde in 35b) schon $\sin(x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ hergeleitet, daraus folgt in Kombination mit Additionstheoremen

$$\begin{aligned} \cos(t)^2 \cdot \sin(t)^2 &= \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t))^2 = \frac{1}{4} \cdot \sin(2t)^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1 - \cos(2 \cdot 2t)}{2} \right) = \frac{1 - \cos(4t)}{8} \end{aligned}$$

Damit folgt für das Integral

$$\begin{aligned}
 A &= 6 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(t)^2 \cdot \sin(t)^2 dt = \frac{6}{8} \cdot \int_0^{\pi/2} 1 - \cos(4x) dx \\
 &= \frac{3}{4} \cdot \left(x - \frac{\sin(4x)}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{\sin(2\pi)}{4} + \frac{\sin(0)}{4} \right) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{8}}}
 \end{aligned}$$

II. Strategie: Kartesische Koordinaten + Substitution

Für $x, y \geq 0$ kann $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ einfach auf y umgeformt werden $\rightarrow y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$. Die Fläche folgt dann einfach aus

$$A = 4 \cdot \int_0^1 y(x) dx = 4 \cdot \int_0^1 (1 - x^{2/3})^{3/2} dx$$

$$\begin{aligned}
 \text{Subst. } x = \cos(t)^3 &\rightarrow 4 \cdot \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos(t)^2)^{3/2} \cdot 3 \cdot \cos(t)^2 \cdot (-\sin(t)) dt \\
 &= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(t)^3 \cdot 3 \cdot \cos(t)^2 \cdot \sin(t) dt \\
 &= 12 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(t)^4 \cdot \cos(t)^2 dt
 \end{aligned}$$

Trick um Integration abzukürzen:

$$\begin{aligned}
 \sin(t)^4 \cdot \cos(t)^2 &= \sin(t)^2 \cdot (\sin(t) \cdot \cos(t))^2 \\
 &= \left(\frac{1 - \cos(2t)}{2} \right) \cdot \frac{\sin(2t)^2}{4} \\
 &= \frac{1}{8} \cdot (\sin(2t)^2 - \sin(2t)^2 \cdot \cos(2t)) \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1 - \cos(4t)}{2} - \sin(2t)^2 \cdot \cos(2t) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow A &= 12 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(t)^4 \cdot \cos(t)^2 dt = \frac{12}{8} \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(4t) dt - \int_0^{\pi/2} \sin(2t)^2 \cos(2t) dt \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \underbrace{\frac{\sin(4t)}{8}}_{=0} \Big|_0^{\pi/2} - \underbrace{\frac{\sin(2t)^3}{6}}_{=0} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{3\pi}{8}}}
 \end{aligned}$$