Blatt 11

Montag, 13. Jänner 2025 21:33

44 I Zeige $f(x,y) = \sin(x)e^y + y\cos(x) = 0$ kann lokal um $(0,0)$ nach y aufgelöst werden.
II Bestimme ersten beiden Ableitungen von $y(x)$ an $x=0$.

I Ziel: Satz 5.8.1, zeige VO treffen zu: 1. offensichtlich
2. als Komposition und Summe C^1 Funktion wieder C^1

zu 3.: zeige $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big|_{(0,0)} = \sin(x)e^y + \cos(x)\Big|_{(0,0)} = 1 \neq 0.$$

Nach Satz 5.8.1 ist also $f(x,y)$ lokal in y um $(0,0)$ auflösbar.

II Es gilt also $g(x) = \sin(x)\cdot e^{y(x)} + y(x)\cdot\cos(x) = 0$, $\forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,
denn nach I existiert gerade eine solche implizite Auflösung.

Wir erhalten also:
$$g'(x) = y'(x)\cdot e^{y(x)}\cdot\sin(x) + \cos(x)\cdot e^{y(x)} + y'(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)y(x)$$
$$= y'(x)\cdot\left[e^{y(x)}\cdot\sin(x) + \cos(x)\right] + \cos(x)e^{y(x)} - \sin(x)y(x) = 0.$$

und somit
$$g''(x) = y''(x)\cdot\left[e^{y(x)}\cdot\sin(x) + \cos(x)\right] + e^{y(x)}\sin(x)y'(x)^2$$
$$+ 2y'(x)\left[e^{y(x)}\cos(x) - \sin(x)\right] - e^{y(x)}\sin(x) - y(x)\cos(x) = 0.$$

Wir berechnen nun $y'(0)$ unter der Annahme, dass $y(0)=0$.

$g'(x) = 0 \Rightarrow g'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{y'(0) = -1}$

Selbes mit $y''(x)$:

$g''(x) = 0 \Rightarrow g''(0) = 0 \Rightarrow \boxed{y''(0) = 2.}$

Die impliziten Ableitung erhalten wir also durch Einsetzen von $(x, y(x)) = (0,0)$ in den jeweiligen Gleichungen.

45 Berechne partielle Ableitungen erster Ordnung von gegebener Funktion unter der Annahme $z = z(x,y)$ an $z(x_0,y_0) = z_0$.

(a) $f(x,y,z) = x^2 z^y - xyz + \sin(x+y+z) = 1$, $(x_0,y_0,z_0) = (-1,0,1)$

Forme um: $x^2z^y - xyz + \sin(x+y+z) - 1 = 0$

Überprüfe Satz 5.8.1: 1. offensichtlich
2. –"–

zu 3.: $\frac{df}{dz}\Big|_{(-1,0,1)} = y\cdot x^2\cdot z^{y-1} - xy + \cos(x+y+z)\cdot 1\Big|_{(-1,0,1)} = 1$

$\Rightarrow$ die Annahme ist legitim.

Es gilt also: $g(x,y) = x^2 z(x,y)^y - xyz(x,y) + \sin(x+y+z(x,y)) - 1 = 0$

I $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 2x\, z(x,y)^y + x^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\cdot y\cdot z(x,y)^{y-1} - \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}xy - y\,z(x,y)$
$+ \cos(x+y+z(x,y))\cdot\left(1 + \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right) = 0$

Setzen wir nun $(-1,0,1)$ ein, so folgt

$-2 + 1\cdot\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}(-1,0)\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\Big|_{(-1,0)} = 1.}$

II $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^2 z(x,y)\cdot\left[\frac{y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)}{z(x,y)} + \log(z(x,y))\right] - xy\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$
$+ \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + 1\right)\cos(x+y+z(x,y)) - x\cdot z(x,y) = 0.$

und somit für $(-1,0,1)$ eingesetzt:

$\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + 1\right)\cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\Big|_{(-1,0)} = -2}.$

(b) $f(x,y,z) = x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3 + xyz + xy - 1 = 0$, $(x_0,y_0,z_0) = (0,1,1)$

Auf gleiche Weise wie in (a) überprüft man VO von Satz 5.8.1.

$\Rightarrow g(x,y) = x^3y^3 + x^3 z(x,y)^3 + y^3 z(x,y)^3 + xy\,z(x,y)^3 + xy - 1 = 0$

I $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3(x^3 + xy + y^3)\, z(x,y)^2\,\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + (3x^2+y)\, z(x,y)^3 + 3x^2y^3 + y = 0.$

Setzen wir nun $(x,y,z) = (0,1,1)$ so folgt

$3\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + 1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{2}{3}}.$

II $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3(x^3 + xy + y^3)\, z(x,y)^2\,\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + (x + 3y^2)\, z(x,y)^3 + 3x^3y^2 + x = 0$

und somit für $(x,y,z) = (0,1,1)$:

$3\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -1}.$

46 I Zeige, dass die Gleichungen
$$f_1(x,y,z) = x\cos(z) + y\cos(x) + z\cos(y) = 0$$
$$f_2(x,y,z) = \sin(x) + \sin(y) - \sin(z) = 0$$
lokal um $(0,0,0)$ nach y und z aufgelöst werden können.
II Bestimme $y'(0)$ und $z'(0)$.

I Wir verwenden wieder Satz 5.8.1:
1. offensichtlich ist $f_1(0,0,0) = 0 = f_2(0,0,0)$.
2. Summe und Produkt von C^1 Funktion wieder C^1
3. Betrachte also $\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} f_{1,y} & f_{1,z} \\ f_{2,y} & f_{2,z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) - z\cdot\sin(y) & -x\cdot\sin(z) + \cos(y) \\ \cos(y) & -\cos(z)\end{pmatrix}$

Nach bekannter Rechenregel gilt
$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = ad - bc \rightsquigarrow \det(\%) = -\left[\cos(z)\left[\cos(x) - z\cdot\sin(y)\right] + \cos(y)\cdot\left[-x\sin(z) + \cos(y)\right]\right]$

Ausgewertet an $(x,y,z) = (0,0,0)$ erhalten wir $-2 \neq 0$.

$\Rightarrow$ y und z können nach x in einer Umgebung um Null aufgelöst werden.
$g_1(x) = x\cdot\cos(z(x)) + y(x)\cdot\cos(x) + z(x)\cdot\cos(y(x)) = 0$
$g_2(x) = \sin(x) + \sin(y(x)) - \sin(z(x))$

II
$g_1'(x) = y'(x)\cdot\left[\cos(x) - z(x)\sin(y(x))\right] + \cos(y(x))z'(x) - y(x)\sin(x) - xz'(x)\sin(z(x)) + \cos(z(x)) = 0.$
$g_2'(x) = y'(x)\cdot\cos(y(x)) - z'(x)\cdot\cos(z(x)) + \cos(x) = 0.$

Setzen wir nun den Punkt $(\underset{x}{0}, \underset{y(x)}{0}, \underset{z(x)}{0})$ ein, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y'(0) + z'(0) + 1 &= 0 \\ y'(0) - z'(0) + 1 &= 0 \end{aligned} \rightsquigarrow \boxed{\begin{aligned} y'(0) &= -1 \\ z'(0) &= 0 \end{aligned}}.$$

47 Stelle folgende Differentialausdrücke in Polarkoordinaten dar

(a) $w = x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x}$

Damit sind $r(x,y)$, $\varphi(x,y)$ also Funktionen abhängig von x und y.

Sei $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$ und $\lambda(r,\varphi) := z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

Gemäß der multivariaten Kettenregel (*) gilt dann

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial\lambda}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad \text{und}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\lambda}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

(*) Erinnerung: $f(x_1(u,v),\dots,x_n(u,v))$ dann ist
$$\frac{\partial f}{\partial u} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial u}.$$

Also ist $w = r\cdot\cos\varphi\cdot\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - r\cdot\sin\varphi\cdot\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$

Nach der Herleitung aus Skript S.152 folgt:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}$$

und somit
$$w = r\cdot\cos\varphi\cdot\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\cdot\sin\varphi + \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}\right) - r\cdot\sin\varphi\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\cos\varphi + \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cdot\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right)\right) \quad (*)$$
$$= \cos^2\varphi\,\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi} + \sin^2\varphi\,\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi} \underset{\cos^2+\sin^2=1}{=} \boxed{\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}.}$$

(b) $w = x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$

Sei $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$ und $\lambda(r,\varphi) := z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

Wir verwenden selbe Tatsachen wie in (a) und erhalten damit nach (*):

$$w = r\cos\varphi\cdot\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right) - r\cdot\sin\varphi\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)$$

$$= r\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial r}\cos^2\varphi - 2\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cos\varphi\sin\varphi - r\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial r}\sin^2\varphi$$

(Δ) $\sin^2(\varphi) = \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}$, $\cos^2(\varphi) = \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}$

$$\overset{(\Delta)}{=} r\cdot\cos(2\varphi)\frac{\partial\lambda}{\partial r} - 2\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cos\varphi\sin\varphi$$

(∇) $\sin(a+b) = \sin(a)\cdot\cos(b) + \cos(b)\cdot\sin(a)$
$\rightsquigarrow \sin(2\varphi) = 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)$

$$\overset{(\nabla)}{=} \boxed{r\cdot\cos(2\varphi)\frac{\partial\lambda}{\partial r} - \sin(2\varphi)\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}}.$$