

Analysis T1

UE 12

- 48) Bestimme $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass $a+b+c=90$ und $a^2+b^2+c^2$ minimal wird.

→ Lagrange-Fkt: $F(a, b, c, \lambda) = (a^2+b^2+c^2) + \lambda(a+b+c-90)$

Somit lauten die partiellen Ableitungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= 2a + \lambda \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} &= 2b + \lambda \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial F}{\partial c} &= 2c + \lambda \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2a &= 2b = 2c = -\lambda \\ \Rightarrow a &= b = c \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = a+b+c-90 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow a+b+c=90$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun

$$90 = a+b+c = 3a \Rightarrow a = 30 = b = c$$

Damit lautet der einzige stationäre Punkt

$$(a, b, c) = (30, 30, 30)$$

Um zu zeigen, dass es sich tatsächlich um das globale Minimum handelt, zeigen wir

$$\begin{aligned} \forall \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{R} : \tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} &= 90 \text{ und zumindest ein Wert } \neq 30 \\ \Rightarrow \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 &> 30^2 + 30^2 + 30^2 = 3 \cdot 30^2 \end{aligned}$$

Seien dazu $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ wie oben, also $\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} = 90$.

Wir schreiben

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 + \Delta a \\ 30 + \Delta b \\ 30 + \Delta c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \end{pmatrix}}_{\vec{w}}$$

Wegen $\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} = 90$ folgt $\Delta a + \Delta b + \Delta c = 0$

$$\Rightarrow 30 \cdot \Delta a + 30 \cdot \Delta b + 30 \cdot \Delta c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$$

Man gilt aber

$$\begin{aligned} \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 &= \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w} \rangle \\ &= \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + 2 \cdot \underbrace{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}_{=0} + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \\ &\stackrel{\downarrow}{=} 3 \cdot 30^2 + \underbrace{(\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2)}_{>0 \text{ falls nicht } \tilde{a} = \tilde{b} = \tilde{c} = 30 \text{ gilt}} > 3 \cdot 30^2 \end{aligned}$$

Somit ist $(30, 30, 30)$ wirklich das globale Minimum.

(Auch andere Möglichkeiten um das zu beweisen, z.B. NB auf $z(x, y)$ umformen und $\tilde{f}(x, y, z(x, y))$ berechnen)

↙ Ellipsenglg.

$$49a) f(x, y) = 2x + y, \text{ NB: } g(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 - 28 = 0$$

Nebenbedingung beschreibt Kurve in $\mathbb{R}^2$, von der sich leicht zeigen lässt, dass sie kompakt ist (abgeschlossen weil g stetig, beschränkt, denn es gilt.

$$2x^2 + xy + y^2 - 28 = \frac{7}{4}x^2 + \left(\frac{x}{2} + y\right)^2 - 28$$

Würde also $x \rightarrow \infty$, so würde $g(x, y) \rightarrow \infty$, was $g(x, y) = 0$ widerspricht. Bleibt x beschränkt und $y \rightarrow \infty$ würde wieder $g(x, y) \rightarrow \infty$ folgen, also muss auch y beschränkt bleiben. (abgeschlossen + beschränkt $\Rightarrow$ kompakt).
 f ist stetig, NB beschreibt komp. Menge $\xrightarrow{\text{Weierstrass}}$ glob. Min. & Max. existieren.

Analysis T1

UE 12

Da f & g differenzierbar sind müssen das globale Minimum & Maximum stationäre Punkte der Lagrange-Funktion sein.

$$F(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda \cdot (2x^2 + xy + y^2 - 28)$$

$$\text{I: } 0 = \frac{\partial F}{\partial x} = 2 + 4\lambda x + \lambda y = 0$$

$$\text{II: } 0 = \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + \lambda x + 2\lambda y = 0$$

$$\text{III: } 0 = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 2x^2 + xy + y^2 - 28 = 0$$

Aus ersten beiden Gleichungen folgt $\lambda \neq 0$ (sonst je $2=0$ bzw. $1=0$), somit folgt

$$4x + y \stackrel{\text{(I)}}{=} -\frac{2}{\lambda} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \stackrel{\text{(II)}}{=} 2 \cdot (x + 2y) = 2x + 4y$$

$\Leftrightarrow 3y = 2x$, wir setzen dies nun in (III) ein.

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{(III)}}{\Rightarrow} 2 \cdot 28 &= 4x^2 + 2xy + 2y^2 \\ &= (2x)^2 + (2x) \cdot y + 2y^2 \\ &= (3y)^2 + (3y) \cdot y + 2y^2 = 14y^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2, \quad x = \frac{3y}{2} = \pm 3$$

Also müssen $(-3, -2)$ & $(3, 2)$ das glob. Min. und Max. sein. Einsetzen in f zeigt dann

$$\begin{aligned} f(-3, -2) &= -2 \cdot 3 - 2 \\ &= -8 < 8 = f(3, 2) \end{aligned}$$

Also $(-3, -2)$ glob. Min. und $(3, 2)$ glob. Max.

$$b) f(x, y, z) = xyz, \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 192$$

Wie in (a) kann argumentiert werden, dass die NB (als Kugelschale im $\mathbb{R}^3$ mit Radius $\sqrt{192}$) eine kompakte Menge beschreibt & f stetig ist. Also existieren glob. Min. und Max., welche kritische Punkte der Lagrange-Fkt sind (f & g wieder differenzierbar).

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 192)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{I: } 0 = \frac{\partial F}{\partial x} = yz + 2\lambda x \\ \text{II: } 0 = \frac{\partial F}{\partial y} = xz + 2\lambda y \\ \text{III: } 0 = \frac{\partial F}{\partial z} = xy + 2\lambda z \\ \text{IV: } 0 = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 192 \end{array} \right\} -2\lambda xyz = y^2 z^2 = x^2 z^2 = x^2 y^2$$

Fall 1: $x = 0$

Dann folgt aus Glg. I auch $yz = 0$

$$(i) y = 0 \xrightarrow{\text{NB}} z^2 = 192 \Rightarrow z = \pm \sqrt{192}$$

$$(ii) z = 0 \xrightarrow{\text{NB}} y^2 = 192 \Rightarrow y = \pm \sqrt{192}$$

Also stationäre Punkte $(0, \pm \sqrt{192}, 0), (0, 0, \pm \sqrt{192})$

Fall 2: $x \neq 0, y = 0$

Dann folgt aus (II), dass $z = 0$ gilt $\xrightarrow{\text{NB}} x = \pm \sqrt{192}$

Also stationäre Punkte $(\pm \sqrt{192}, 0, 0)$

Fall 3: $x \neq 0, y \neq 0$

Das $2\lambda xyz = \overbrace{x^2 y^2}^{\neq 0} = x^2 z^2 = y^2 z^2$ folgt $z \neq 0$. Nun

$$x^2 y^2 = x^2 z^2 \Rightarrow y^2 = z^2 \Rightarrow |y| = |z|$$

$$y^2 x^2 = y^2 z^2 \Rightarrow x^2 = z^2 \Rightarrow |x| = |z|$$

$$z^2 x^2 = z^2 y^2 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow |x| = |y|$$

Also gilt et. NB.

$$192 = x^2 + y^2 + z^2 = 3x^2 \\ \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8$$

Die stationären Punkte lauten somit

aus Fall 3

$$\left\{ \begin{array}{ll} (8, 8, 8) & \rightarrow f(8, 8, 8) = 512 \quad \swarrow \text{also glob. Max.} \\ (8, 8, -8) & \rightarrow f(8, 8, -8) = -512 \quad \swarrow \text{glob. Min.} \\ (8, -8, 8) & \rightarrow f(8, -8, 8) = -512 \quad \swarrow \text{glob. Min.} \\ (8, -8, -8) & \rightarrow f(8, -8, -8) = 512 \quad \swarrow \text{glob. Max.} \\ (-8, 8, 8) & \rightarrow f(-8, 8, 8) = -512 \quad \swarrow \text{glob. Min.} \\ (-8, 8, -8) & \rightarrow f(-8, 8, -8) = 512 \quad \swarrow \text{glob. Max.} \\ (-8, -8, 8) & \rightarrow f(-8, -8, 8) = 512 \quad \swarrow \text{glob. Max.} \\ (-8, -8, -8) & \rightarrow f(-8, -8, -8) = -512 \quad \swarrow \text{glob. Min.} \end{array} \right.$$

aus Fällen 1 & 2

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\pm\sqrt{192}, 0, 0) & \rightarrow f(\pm\sqrt{192}, 0, 0) = 0 \\ (0, \pm\sqrt{192}, 0) & \rightarrow f(0, \pm\sqrt{192}, 0) = 0 \\ (0, 0, \pm\sqrt{192}) & \rightarrow f(0, 0, \pm\sqrt{192}) = 0 \end{array} \right.$$

Von den 14 stationären Punkten sind also 4 je globale Minima (mit Fktswert -512) und 4 je globale Maxima (mit Fktswert 512). Die restlichen 6 kritischen Punkte sind Sattelpunkte (Fktswert 0 und in einer Umgebung herum gibt es positive & negative Werte).

50) $f(x, y, z) = 2x + 3y - 7z$

$g(x, y, z) = x + y + z + 3 \stackrel{!}{=} 0$

$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 549 \stackrel{!}{=} 0$

1. NB beschreibt Ebene im Raum

2. NB beschreibt Kugelschale im Raum

Schnitt von beiden NB ergibt Kreiskurve im $\mathbb{R}^3$, welche wieder kompakt ist. f ist weiters stetig

Weierstrass

$\Rightarrow$ glob. Min. & Max. von f existiert und kann wieder mit Lagrange gefunden werden.

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda, \mu) &= f(x, y, z) + \lambda \cdot g(x, y, z) + \mu \cdot h(x, y, z) \\ &= 2x + 3y - 7z + \lambda \cdot (x + y + z + 3) + \mu \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 549) \end{aligned}$$

$$\text{I: } 0 = \frac{\partial F}{\partial x} = 2 + \lambda + 2\mu x$$

$$\text{II: } 0 = \frac{\partial F}{\partial y} = 3 + \lambda + 2\mu y$$

$$\text{III: } 0 = \frac{\partial F}{\partial z} = -7 + \lambda + 2\mu z$$

$$\text{IV: } 0 = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z + 3$$

$$\text{V: } 0 = \frac{\partial F}{\partial \mu} = x^2 + y^2 + z^2 - 549$$

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$. Dann lautet

Glg. (I) in vektorieller Form

$$\vec{0} = \vec{u} + \lambda \cdot \vec{w} + 2\mu \cdot \vec{v}, \quad \text{mit } x^2 + y^2 + z^2$$

während (V) bedeutet, dass $|\vec{v}|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 549$ gilt.

Schließlich bedeutet Glg. (IV), dass

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = x + y + z = -3$$

In vektorieller Form bleiben also zusammengefasst folgende 3 Bestimmungsgleichungen über:

$$\text{I': } 2\mu \cdot \vec{v} + \vec{u} + \lambda \cdot \vec{w} = \vec{0}$$

$$\text{II': } |\vec{v}|^2 = 549$$

$$\text{III': } \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = -3$$

- Bevor wir die Gleichungen auflösen ein paar kleine Nebenrechnungen:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 2 + 3 + (-7) = -2, \quad \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$$

Nun setzen wir (I') in (III') ein

$$\begin{aligned} \stackrel{(III')}{\Rightarrow} 6\mu &= (-2\mu) \cdot (-3) = (-2\mu) \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \\ &= \langle (-2\mu) \cdot \vec{v}, \vec{w} \rangle \\ &\stackrel{(I')}{=} \langle \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \lambda \cdot \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \\ &= (-2) + 3\lambda \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3\lambda = 2 + 6\mu$$

Aus dem Ergebnis und (I') bekommen wir daher

$$\begin{aligned} \vec{0} &= 3\vec{v} + 3\lambda \cdot \vec{w} + 6\mu \cdot \vec{v} \\ &= 3\vec{v} + 2\vec{w} + 6\mu \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 6\mu \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = -(3\vec{v} + 2\vec{w}) = -\left[3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -8 \\ -11 \\ 19 \end{pmatrix}$$

- Somit muss $\mu \neq 0$ gelten. Weiters wissen wir

$$\begin{aligned} |\vec{v} + \vec{w}|^2 &= \langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = |\vec{v}|^2 + 2 \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + |\vec{w}|^2 \\ &\stackrel{(II')}{=} \stackrel{2 \cdot (III')}{=} 549 + 2 \cdot (-3) + 3 = 546 \end{aligned}$$

Substituieren wir für einen Moment $\vec{r} = \vec{v} + \vec{w}$ und $\alpha = \frac{1}{6\mu} \neq 0$, dann haben wir also gezeigt, dass für $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gilt

$$(I'') \quad \vec{r} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -11 \\ 19 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{r}|^2 = \alpha^2 \cdot (8^2 + 11^2 + 19^2) = 546 \cdot \alpha^2$$

$$(II'') \quad |\vec{r}|^2 = 546 \quad \text{also } \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

Rücksubstitution liefert dann für $\vec{v} = \vec{r} - \vec{w}$, dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -11 \\ 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix}, f(-9, -12, 18) = -180$$

$$\alpha = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix}, f(7, 10, -20) = 184$$

Also ist $(-9, -12, 18)$ das globale Minimum und $(7, 10, -20)$ das globale Maximum.

Ad: Kürzere Lösung ohne Vektoren:

$$\text{I: } 2 + \lambda + 2\mu x = 0$$

$$\text{II: } 3 + \lambda + 2\mu y = 0$$

$$\text{III: } -7 + \lambda + 2\mu z = 0$$

$$\text{IV: } x + y + z = -3 \Rightarrow z = -3 - x - y$$

$$\text{V: } x^2 + y^2 + z^2 = 549 \Rightarrow x^2 + y^2 + (3 - x - y)^2 = 549$$

Aus (III) folgt weiters $7 - \lambda = 2\mu z = -6\mu - 2\mu x - 2\mu y$,
woraus mit (I) & (II) folgt

$$7 - \lambda = 6\mu - 2\mu x - 2\mu y = -6\mu + (2 + \lambda) + (3 + \lambda)$$

$$\Leftrightarrow 6\mu + 2 = 3\lambda$$

Wir erhalten das reduzierte System (NB $x^2 + y^2 + (3 + x + y)^2 = 549$)

$$\begin{aligned} \text{(I')} \quad 0 &= 6 + 3\lambda + 6\mu x = 8 + 6\mu \cdot (x + 1) \\ \text{(II')} \quad 0 &= 9 + 3\lambda + 6\mu y = 11 + 6\mu \cdot (y + 1) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{(I')} \quad 0 &= 6 + 3\lambda + 6\mu x = 8 + 6\mu \cdot (x + 1) \\ \text{(II')} \quad 0 &= 9 + 3\lambda + 6\mu y = 11 + 6\mu \cdot (y + 1) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Es muss} \\ \mu \neq 0 \\ \text{geelten?} \end{array}$$

Eliminieren wir μ folgt weiters

$$(x + 1) = -8 \cdot \frac{1}{6\mu} = +\frac{8}{11} \cdot \left(\frac{-11}{6\mu}\right) = \frac{8}{11} \cdot (y + 1)$$

$$\Leftrightarrow 11x + 11 = 8y + 8 \Leftrightarrow 11x - 8y + 3 = 0$$

Also haben wir nun

$$\text{(I'')} \quad 11x - 8y + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{8y - 3}{11}$$

$$\text{(II'')} \quad x^2 + y^2 + (3 + x + y)^2 = 549 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 9 + 2xy + 6x + 6y = 549$$

Analysis T1

UE 12

Einsetzen von (I') in (II') liefert

$$\begin{aligned} 549 &= 2 \cdot \left(\frac{8y-3}{11} \right)^2 + 2y^2 + 9 + 2y \cdot \left(\frac{8y-3}{11} \right) + 6 \cdot \left(\frac{8y-3}{11} \right) + 6y \\ &= \frac{1}{11^2} \cdot [2 \cdot (64y^2 - 48y + 9) + 2 \cdot 121 \cdot y^2 + 9 \cdot 121 + 22 \cdot (8y^2 - 3y) + 66(8y-3) + 6 \cdot 121y] \\ &= \frac{1}{121} \cdot [128y^2 - 96y + 18 + 242y^2 + 1089 + 176y^2 - 66y + 528y - 198 + 726y] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 66429 = 546y^2 + 1092y + 909$$

$$\Leftrightarrow 546y^2 + 1092y - 65520 = 0 \quad \downarrow \text{Division durch 546}$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y - 120 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 + 120} = -1 \pm 11 \quad \begin{matrix} \nearrow y_1 = 10 \\ \rightarrow y_2 = -12 \end{matrix}$$

Nun folgt aus $x = \frac{8y-3}{11}$ weiters $x_1 = 7$, $x_2 = -9$,
sowie aus $z = -3 - x - y$ schließlich $z_1 = -20$, $z_2 = 18$
folgt.

$$f(7, 10, -20) = 189 \Rightarrow \text{glob. Max.}$$

$$f(-9, -12, 18) = -180 \Rightarrow \text{glob. Min.}$$