11. Sind die folgenden Folgen konvergent? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an. Ebenso, wenn ein Grenzwert g existiert, geben Sie für alle $\varepsilon > 0$ ein N_ε and, so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt $|a_n - g| < \varepsilon$.

    (a) $a_n = \dfrac{(n+1)(n^2-1)}{(5n-1)(4n^2+1)}$,

    (b) $b_n = \dfrac{(n+1)(n^3-1)}{(2n^2+1)(3n+1)}$.

12. Die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch folgendes Bildungsgesetz gegeben: sei $n = \sum_{k=0}^{K} z_k 10^k$ die Zifferndarstellung von n, dann ist

$$v_n = \sum_{k=0}^{K} z_k 10^{-k-1},$$

    also z.B. $v_{123} = 0.321$ oder $v_{5430} = 0.0345$. Zeigen Sie, dass jeder Punkt in $[0,1]$ ein Häufungspunkt dieser Folge ist. Hinweis: Geben Sie zu einem Punkt $x \in [0,1]$ eine Teilfolge von $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die gegen x konvergiert.

13. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

    Hinweis: Schätzen Sie den Klammer-Ausdruck geeignet nach oben und unten ab, und zeigen Sie von den beiden neuen Folgen, dass sie den Grenzwert $\dfrac{1}{2}$ besitzen!

14. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

    Hinweis: Betrachten Sie $(1 - \frac{1}{n^2})^n$ und schäzten Sie diesen Ausdruck nach beiden Seiten ab; die Bernoulli-Ungleichung hilft dabei.

15. Ist die Folge $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ konvergent? (Hinweis: untersuchen Sie die Folge auf Monotonie und Beschränktheit)