

25. Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Ausdrücke, sowie deren Definitionsbereich:

(a) $\cos(x^2) \exp(\arccos(\sqrt{x}))$ (b) x^x (c) $\exp(\operatorname{Arctanh}(x))$

26. Zeigen Sie, dass $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ für $x \in (0, \infty)$ streng monoton wachsend ist.

27. Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) $\sin(x) < x < \tan(x)$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(b) $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$

(c) $\operatorname{Arsinh}(x) \geq \ln(1 + x)$ für $x > -1$

28. Es sei f in $[a, b]$ differenzierbar und es gelte: $f(a) = 0$, $f(b) > 0$, $f'(b) < 0$.

Zeigen Sie: Dann gibt es in (a, b) eine Stelle c mit $f'(c) = 0$.

29. Wenn f und g in einem Intervall I differenzierbar sind und es gilt:

$$f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$$

so liegt zwischen zwei Nullstellen von f immer eine Nullstelle von g . (Beweis!)