Zusätzliche Übungsbeispiele für den 2. Test aus Analysis 1 für Informatikstudien/ Analysis T1

11. Januar 2025

1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)}\ ,\quad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\ \cos x}{\sin^3 x}\ ,\quad (c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos\ 2x-\cos x}{\sin^2 x}\ ,$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{1-\cos x}\ ,\quad (e)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\ 2x}{\cos^2 x}\ ,\quad (f)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)\ ,\quad (g)\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}\ ,$$

$$(h)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{\ln x}\ ,\quad (i)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{x^2-1}\ ,\quad (j)\ \lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{x}}\ ,\quad (k)\ \lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}\ ,$$

$$(l)\ \lim_{x\to\infty}\left[x-\sqrt{(x-a)(x-b)}\right]\ ,\quad (m)\ \lim_{x\to 0^+}(e^x-1)^x\ ,\quad (n)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}\ ,$$

$$(o)\ \lim_{x\to 1}(\ln x)\ln(1-x)\ ,\quad (p)\ \lim_{x\to\infty}x\ \ln(1+\frac{1}{x})\ ,\quad (q)\ \lim_{x\to\infty}x^2\left(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}\right).$$

2. Diskutieren Sie die folgenden reellen Funktionen (Skizzen!):

(a) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ (b) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ (c) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

(d) $f(x)=e^{-x^2}$ (e) $f(x)=x^2e^{x^2}$

(f) $f(x)=nxe^{-nx^2}, (n=1,2,\ldots)$ (g) $f(x)=x\ \ln x$

(h) $f(x)=(x^2-1)e^{-ax}, a\geq 0$ (i) $f(x)=\operatorname{Arsinh}\dfrac{x+1}{x-1}$

(j) $f(x)=\tanh\dfrac{1}{x}$ (k) $f(x)=e^{-x}\sin x, x\geq 0$

(l) $f(x)=e^{-x^2}\cos x$

3. Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int \tanh(\alpha x)\, dx$ (b) $\int x^2 e^{-x^3}\, dx$ (c) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+x^2}}$

(e) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ (f) $\int x\sqrt{1+x}\, dx$

(g) $\int \frac{x^3+5x^2-4x+2}{x^2+7x+12}\, dx$

(h) $\int \frac{x^2+3x+7}{(x+2)(x^2+6x+10)}\, dx$ (i) $\int x^3 \ln x\, dx$

(j) $\int x^3 \sin x\, dx$ (k) $\int \frac{x^3-3x^2+2x+7}{x^2-x-6}\, dx$

(l) $\int \frac{x^3+5x^2-7x+6}{(x+1)(x^2+2x+2)}\, dx$

4. Berechnen Sie die Bogenlänge der Traktrix

$$x = a\text{Arcosh}(\frac{a}{y}) - \sqrt{a^2-y^2},\ b \le y \le a,\ a, b\ \in \mathbb{R}.$$

5. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $y = a \ln \cos \frac{x}{a}$ von $x = 0$ bis $x = b$.

6. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $x^2 + y^2 = ax,\ a \in \mathbb{R}$.

7. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $y = a \ln \frac{a^2}{a^2-x^2},\ 0 \le x \le b < a,\ 0 \le b < a$.

8. Berechnen Sie Oberfläche und Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kettenlinie $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ $(-a \le x \le a)$ um die x-Achse entsteht.

9. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kurve $y^2 - x^2 = 1$ $(-1 \le x \le 1,\, y > 0)$ um die y-Achse entsteht.

10. Zeigen Sie, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} x\cos(z) + y\cos(x) + z\cos(y) &= 0 \\ \sin(x) + \sin(y) - \sin(z) &= 0 \end{aligned}$$

lokal um $(0,0,0)$ nach y und z aufgelöst werden können. Bestimmen Sie $y'(0)$ und $z'(0)$ der so gegebenen Funktionen $y(x)$ und $z(x)$.

11. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$y^2 + xy + z^2 - e^{xz} = 1$$

in einer Umgebung des Punktes $(0,-1,1)$ in der Form $z = g(x,y)$ eindeutig auflösbar ist, und berechne die Taylorentwicklung von g um den Punkt $(0,-1)$ bis zu den Gliedern 2. Ordnung.

12. Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktionen
a) $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$ mit $0 \leq x, y \leq 2\pi$
b) $f(x,y) = \cos(x-y)\cos(x+y)$ mit $0 \leq x, y \leq \pi$

13. Berechnen Sie den kürzesten Abstand des Nullpunktes zur Hyperbel $x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$.

14. Bestimmen Sie die kritischen Punkte und ihren Typ für die folgenden Funktionen

(a) $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y), \quad 0 \leq x, y \leq 2\pi$

(b) $f(x,y) = 3x^2 - 2(y+1)x + 3y - 1$

(c) $f(x,y) = x^3 + x^2 - 6xy + y^2 + x + 4y$