

Zusätzliche Übungsaufgaben

5. November 2024

1. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{\ell=0}^n \ell \binom{n}{\ell} = n2^{n-1}$.
2. Es seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ positive Zahlen. Zeigen Sie:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

3. Die rekursiv definierte Folge $(f_0, f_1, f_2, \dots)$ mit $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$ heißt die *Fibonacci-Folge* und f_n die *n-te Fibonacci-Zahl*. Die ersten Glieder der Fibonacci-Folge sind also 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Für die n -te Fibonacci-Zahl gilt die explizite Darstellung

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad (\text{Binetsche Formel}).$$

Zeigen Sie sie durch vollständige Induktion.

4. Lösen Sie folgende Gleichungen über den komplexen Zahlen. Geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil der Lösung an.

(a) $\frac{(1 - 2i)z + 9}{(3 - 4i)z - (9 - 4i)} = 8 + 5i,$

(b) $z^2 = 3 + 4i,$

(c) $z^2 - 7z + (13 + i) = 0,$

(d) $z^2 + 3z + (6 + 2i) = 0.$

5. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^3}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-5i)^n}{n!}$.

6. Sind die folgenden Folgen konvergent? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(a) $\frac{\sqrt{9n^2 + 10}}{12n + 1}$,

(b) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n$,

(c) $\frac{n}{3^n}$,

(d) $\frac{n^2}{4^n}$,

(e) $\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n}$.

7. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Folge

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

8. Untersuchen Sie die folgenden rekursiv definierten Folgen (x_n) auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte:

(a) $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}, \quad n \geq 1, \quad x_1 = a, \quad 0 \leq a \leq \frac{1}{2}$

(b) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(a + x_n^2), \quad n \geq 1, \quad x_1 = 0, \quad 0 \leq a \leq 1$

(c) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(a - x_n^2), \quad n \geq 1, \quad x_1 = 0, \quad 0 \leq a \leq 1$

$$(d) \quad x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 2$$

$$(e) \quad x_{n+1} = a + \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 0, \quad x_0 = a, \quad a \geq 1$$

$$(f) \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 1$$

$$(g) \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{p}{x_n} \right), \quad n \geq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad p \geq 0$$

9. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\begin{array}{lll} (a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 - 1}} & (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} & (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2}{n^4 + 1} \\ (d) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1} & (e) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{n+1} & (f) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \\ (g) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 3^n & (h) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! 3^n} & (i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \\ (j) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n} & (k) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n}{3^n} & \end{array}$$