1. Es sei
$$(x)_+^\gamma := \begin{cases} x^\gamma & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases} \qquad x, \gamma \in \mathbb{R}.$$
Diskutieren Sie die Differenzierbarkeit der Funktion
$$f(\alpha) := \left( \frac{(\sin\phi)^2 - (\sin\alpha)^2}{1 - (\sin\alpha)^2} \right)_+^\gamma, \qquad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$
wobei $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\gamma \in (0, \infty)$ zwei Parameter sind, die nicht von $\alpha$ abhängen.

2. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \begin{cases} x\,(1 + 2x\sin(1/x)) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$
Zeigen Sie:
   (a) Die Funktion $f$ ist überall in $\mathbb{R}$ differenzierbar.
   (b) Es gilt $f'(0) > 0$, aber jede Umgebung von 0 enthält Intervalle, auf denen $f$ streng monoton fällt. Folgern Sie: die Ableitungsfunktion $f'$ ist unstetig in 0.
   (c) Skizze.

3. Diskutieren Sie die Funktion
$$f(x) = \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} - 6, \qquad x \geq 0.$$
Programm: Definitionsmenge und Stetigkeit und Differenzierbarkeit, Nullstellen, Extrema, Monotonie, Wendepunkte, Krümmungsverhalten, Bildmenge, Verhalten am Rande des Definitionsbereiches, Asymptoten und Skizze.

4. Diskutieren Sie die folgende reelle Funktion
$$f(x) = \sqrt{x^6 - x^2} - x^3 - x.$$
Programm: Definitionsmenge, Stetigkeit und Differenzierbarkeit, Nullstellen, Wertebereich, Monotonie und lokale und globale Extrema, Wendepunkte und Krümmungsverhalten, Verhalten am Rand des Definitionsbereiches, Asymptoten und Skizze.

5. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 1/(1 + x^2)$.
   (a) Bestimmen Sie eine möglichst optimale globale Konstante $M$ so, dass
$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y| \qquad \text{für all } x, y \in \mathbb{R}.$$
   (b) **(Bonus)** Ist für $x \neq y$ Gleichheit in obiger Abschätzung möglich?