49. Gegeben sei eine beliebige Metrik d auf X und
$$d^*(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \qquad x,y \in X.$$
Zeigen Sie,
    (a) dass d^* eine beschränkte Metrik auf X ist.
    (b) dass i.a. eine beschränkte und abgeschlossene Menge nicht kompakt sein muss.
    (c) dass jede Kugel in der einen Metrik eine Kugel in der anderen Metrik ist, und damit, dass eine Menge offen bzgl. d ist genau dann, wenn sie offen bzgl. d^* ist.

50. Es sei $X := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie:
    (a) Die Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit
    $$d(m,n) := \frac{|m-n|}{mn}, \quad m,n \in \mathbb{N}, \qquad d(m,\infty) = d(\infty,m) := \frac{1}{m}, \quad m \in \mathbb{N}$$
    und $d(\infty,\infty) := 0$ ist eine Metrix auf X.
    (b) Die Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist stetig genau dann, wenn
    $$\lim_{n\to\infty} f(n) = f(\infty).$$
    (c) Bestimmen Sie all offenen, abgeschlossenen, kompakten Teilmengen von (X,d). Ist (X,d) kompakt bzw. vollständig?

51. Seien (X_i, d_i) $(i \in \mathbb{N})$ metrische Räume. Zeigen Sie:
    (a) Durch
    $$d_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)$$
    und
    $$d_m(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_i d_i(x_i,y_i)$$
    sind auf $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ zwei äquivalente Metriken gegeben.
    (b) Durch
    $$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)}$$
    ist eine Metrik auf dem Produktraum $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ gegeben.

52. Seien (X_i, d_i) $(i = 1,2,3,\ldots)$ kompakte metrische Räume. Zeigen Sie, dass dann auch $\prod_{i=1}^{n} X_i$ mit den in 51(a) gegebenen Metriken kompakt ist (Satz von Tychonov).

    Bemerkung: Der Satz stimmt auch für abzählbar unendlich viele Faktoren mit der Metrik aus 51(b).

53. Ein metrischer Raum (X, d) hat die *endliche Durchschnittseigenschaft*, falls für jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen von X für welche alle endlichen Durchschnitte $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}$ mit $i_1, \ldots, i_n \in I$ nicht leer sind stets auch $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ gilt.

   (a) Zeigen Sie: Der metrische Raum (X, d) ist kompakt genau dann, wenn er die endliche Durchschnittseigenschaft hat.

   (b) Beweisen Sie mit Überdeckungskompaktheit: In einem metrischen Raum (X, d) ist jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge von X auch kompakt.

   (c) Zeigen Sie den Satz vom Minimum und Maximum für Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$, wobei (X, d) ein kompakter metrischer Raum ist.

   Hinweis: Benutzen Sie die endliche Durchschnittseigenschaft in Ihrem Beweis.

54. Die *Mitteldrittel-Cantormenge* K wird durch fortgesetztes Entfernen des offenen mittleren Drittels der Liniensegmente der vorherigen Instanz erzeugt. Die 0-te Instanz ist das Intervall $K_0 := [0, 1]$.

   (a) Geben Sie eine Mengendarstellung von K.

   (b) Bestimmen Sie den Rand von K. Gibt es innere Punkte? Ist K abgeschlossen? Gibt es Intervalle in K?

   (c) Zeigen Sie: Jeder Punkt von K ist Häufungspunkt von K.

   (d) Zeigen Sie: K besteht genau aus den Zahlen in ternärer Darstellung

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{3^n} \qquad \text{mit } \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \ldots \in \{0, 2\}.$$

   (e) Zeigen Sie: K hat dieselbe Mächtigkeit wie das Kontinuum $\mathbb{R}$, da

   $$\psi : [0, 1) \to K, \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{2^n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta_n}{3^n},$$

   wobei $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \in \{0, 1\}$, eine injektive Abbildung ist.

   (f) Da jede Instanz K_n in der Konstruktion von K aus Liniensegmenten besteht, kann K_n eine Länge L_n zugeordnet werden. Welche Länge ergibt sich für $n \to \infty$. *(In anderen Worten: Ist K eine Nullmenge bzw. eine "dünne" Menge?)*

   (g) **Zusatz:** Die Cantor artige Menge werde durch Entfernen von offenen mittleren Segmenten der Länge $\frac{1}{2^{2n}}$ im n-ten Schritt rekursiv definiert. Was ändert sich im Vergleich zur Mitteldrittel-Cantormenge K?