55. Sei $K \neq \emptyset$ kompakt mit Metrik d. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : K \to K$ mit der Eigenschaft
$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \qquad x, y \in K, x \neq y,$$
genau einen Fixpunkt besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto d(x, f(x))$, $x \in K$.

56. Sei p eine (positive) Primzahl. Jede rationale Zahl x ausser der Null lässt sich in der Form $x = \pm p^n\,(a/b)$ schreiben mit einer eindeutig bestimmten ganzen Zahl n und zwei natürlichen Zahlen a und b, die beide nicht durch p teilbar sind. Dadurch ist eine Funktion $v_p : \mathbb{Q}\setminus\{0\} \to \mathbb{Z}$ mit $v_p(x) := n$ gegeben. Damit lässt sich die *p-adische Bewertung* einer rationalen Zahl x definieren als
$$|x|_p := \begin{cases} p^{-v_p(x)} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle rationalen Zahlen x, y und z gilt
$$|x - y|_p \leq \max\left\{|x - z|_p, |y - z|_p\right\}$$
und deshalb auch die Dreiecksungleichung
$$|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p.$$
Zeigen Sie, dass $\rho(x, y) := |x - y|_p$ eine (Ultra-)Metrik auf $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Die Folge $(p^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge bzgl. $|\cdot|_p$.

(c) Die Folge $((12/5)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge bzgl. $|\cdot|_3$ und unbeschränkt bzgl. $|\cdot|_5$.

(d) Gegeben $p > 2$, die Folge $(2^{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt bzgl. $|\cdot|_p$ und **keine** Cauchy-Folge bzgl. $|\cdot|_p$.

Bemerkung: Nach Cantor 1883 können die reellen Zahlen mittels Cauchy-Folgen von rationalen Zahlen konstruiert werden (Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bzgl. Euklidischem Betrag $|\cdot|$.) In ähnlicher Weise können p-adische *Zahlen mittels Cauchy-Folgen von rationalen Zahlen bzgl. $|\cdot|_p$ konstruiert werden (Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bzgl. $|\cdot|_p$.)*

57. Sei K ein kompakter metrischer Raum und Y ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f : K \to Y$ auch gleichmässig stetig ist. Führen Sie den Beweis sowohl für Folgen- als auch für Überdeckungskompaktheit.

58. Zeigen Sie den Satz von Dini: Sei K ein kompakter metrischer Raum und $f_n : K \to \mathbb{R}$ eine punktweise monoton wachsende Folge stetiger Funktionen, sodass die punktweise Grenzfunktion $f : K \to \mathbb{R}$ stetig ist. Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig auf K gegen f.

Hinweis: Betrachten Sie für $\epsilon > 0$ die Mengen $O_n := \{x \in K \mid f(x) - f_n(x) < \epsilon\}$.