59. Zeigen Sie, dass die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist:

$$\left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \mid x > 0 \right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])\,.$$

60. Das *kartesische Blatt* ist eine ebene Kurve 3. Ordnung gegeben durch die Gleichung

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Sei $a > 0$. Eine Parameterdarstellung der Schleife dieser Kurve ist

$$\gamma: \quad x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \qquad 0 \leq t < \infty.$$

Zeigen Sie, dass die Fläche dieser Schleife durch $3a^2/2$ gegeben ist.

Hinweis: Es ist günstiger, auf Polarkoordinaten zu wechseln. Sie benötigen dazu die Sektorformel von Leibniz für Polarkoordinaten. Für die Flächenberechnung verwenden Sie nicht die Standardsubstitution $u = \tan(\theta/2)$. Es geht viel einfacher.

61. Gegeben Sei das kartesische Blatt aus Beispiel 60.

    (a) Bestimmen Sie den Tangential- und den Normalvektor im Punkt $P(3a/2, 3a/2)$ der Schleife. Verwenden Sie die in Beispiel 60 angegebene Parametrisierung.

    (b) Finden Sie die Tangente an die Kurve durch den Punkt P.

    (c) Finden Sie die Normalengerade an die Kurve durch den Punkt P.

    (d) Bestimmen Sie die Krümmung im Punkt P, den zugehörigen Krümmungsradius und Krümmungsmittelpunkt (Mittelpunkt des Kreises mit derselben Krümmung, der die Kurve in P berührt).

62. Die *Traktrix* ist durch die Gleichungen

$$x(t) = t - \tanh(t), \qquad y(t) = \frac{1}{\cosh(t)}$$

für $t \geq 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass der Abschnitt der Tangente zwischen dem Punkt $(x(t), y(t))$ und der x-Achse konstante Länge hat. Argumentieren Sie damit, dass diese Kurve von einem Massenpunkt beschrieben wird, der an einer Kette gezogen wird. Bestimmen Sie die Evolute der Traktrix.

63. (a) Leiten Sie die folgende Formel

$$\kappa^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{\langle \dot{\vec{x}}, \dot{\vec{x}} \rangle \langle \ddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \rangle - \langle \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \rangle^2}{\langle \dot{\vec{x}}, \dot{\vec{x}} \rangle^3}$$

für die *Krümmung* $\kappa = \kappa(t)$ einer $\mathcal{C}^2$-Kurve $\vec{x} = \vec{x}(t)$ und die folgende Formel

$$\tau(t) = R^2 \, \frac{\langle \dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}} \rangle}{\langle \dot{\vec{x}}, \dot{\vec{x}} \rangle^3} = \frac{\det\left(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}\right)}{\left\|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}\right\|^2}$$

für die *Torsion* $\tau = \tau(t)$ einer $\mathcal{C}^3$-Kurve $\vec{x} = \vec{x}(t)$ in allgemeiner Parameterdarstellung her.

(b) Bestimmen Sie das begleitende Dreibein im Punkt $(0, \sqrt{2}, \frac{1}{2})$ der Raumkurve (2),

$$\gamma : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ \sqrt{2}\, t \\ \frac{1}{2}\, t^2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2} \leq t < 2. \tag{2}$$

(c) Bestimmen Sie Krümmung und Torsion im Punkt $(0, \sqrt{2}, \frac{1}{2})$ der Raumkurve in (2).

(d) Bestimmen Sie die Länge der in (2) gegebenen Raumkurve.

64. **Zusatz:** Schätzen Sie die Masse der Sonne aus den Daten der Erdbewegung durch Anwenden der Keplerschen Gesetze und des Graviationsgesetzes. Keinen Taschenrechner verwenden (Überschlagsrechnung)!