

6. Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktion:

$$f(x) := \cos(x) \ln\left(\frac{\cos(x)}{x + \ln(1+x^2)}\right) + \arctan(\sqrt{x(1-x)}).$$

7. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sinh x} - \frac{1}{x} \right), \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos(x)}{x}.$$

8. Zeigen Sie, dass folgendes asymptotische Verhalten gilt:

$$e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \simeq \frac{e/2}{x} \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

9. Beweisen Sie folgende Ungleichungen:

$$(a) \quad e^x (y-x) < e^y - e^x < e^y (y-x), \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x < y.$$

$$(b) \quad \ln(x) < \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}, \quad x > 1.$$

10. Es sei f in $[a, b]$ differenzierbar und es gelte: $f(a) = 0$, $f(b) > 0$, $f'(b) < 0$.
Zeigen Sie: Dann gibt es in (a, b) eine Stelle c mit $f'(c) = 0$.

11. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) := \ln(1 - x + x^2).$$

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, 0, x)$.

(b) Geben Sie eine Schranke für den Fehler $|f(x) - T_2(f, 0, x)|$ im Intervall $[0, 1]$ an.

(c) **(Bonus)** Wie (a) und (b), jedoch für das n -te Taylorpolynom $T_n(f, 0, x)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.