12. Approximieren Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ durch ein Taylorpolynom von f im Punkt 0 so, dass der Fehler auf dem Intervall $[0, 1-\varepsilon]$ für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ höchstens 10^{-15} ist.

13. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

glatt in $\mathbb{R}$ (d.h. aus $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$), jedoch nicht überall in $\mathbb{R}$ analytisch ist.

14. Zeigen Sie: Die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

ist in $\mathbb{R}$ absolut konvergent, aber nicht gleichmässig konvergent auf Intervallen $[a, b]$ die die Null enthalten. Auf welchen kompakten Intervallen ist diese Reihe gleichmässig konvergent? Auf welchen kompakten Intervallen ist sie **nicht** normal konvergent? Bestimmen Sie die Summenfunktion.

15. Zeigen Sie: Die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$$

ist in $\mathbb{R}$ gleichmässig konvergent, aber für kein $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

16. Gegeben sei die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}, \qquad x \in (-1, 1). \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie: Diese Reihe konvergiert normal auf jedem Intervall $[-a, a]$ mit $0 < a < 1$.

(b) Bestimmen Sie die Koeffizienten in der Potenzreihendarstellung $\sum_{m=1}^{\infty} a_m \, x^m$ von (1).

17. Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) Für alle positiven $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\right) \geq n^2.$$

(b) Für alle positiven $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)^2} \leq \sum_{j=1}^{n} \sqrt{x_j^2 + y_j^2}.$$