18. Bestimmen Sie mit Hilfe von Maclaurinreihen-Entwicklungen den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(1-(\sin x)^3\right)+3\left(\operatorname{artanh}(x)-x\right)}{\left((1+x)^{x^2}-1\right)\left(\cosh(x)-1\right)}\right)-\frac{1}{10\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{3}{2}}{n}.$$

19. Zeigen Sie, dass die Potenzreihe

$$J_0(x):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

absolut auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert, mindestens zweimal auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$x^2\,y''(x)+x\,y'(x)+x^2\,y=0.$$

20. Gegeben ist die Potenzreihe

$$f(z):=i\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\,z^n.$$

(a) Untersuchen Sie diese Reihe auf Konvergenz (punktweise, absolut, gleichmässig, normal) insbesondere auch auf dem Rand der Konvergenzkreisscheibe.

(b) Wie (a), aber für die Stammfunktion.

(c) Wie (a), aber für die Ableitungsfunktion, falls diese existiert.

(d) Bestimmen Sie die Summenfunktion.

*Hinweis: Sie dürfen die Abelsche Summationsformel*

$$\sum_{n=1}^{N}a_nb_n=A_Nb_N+\sum_{n=1}^{N-1}A_n\left(b_n-b_{n+1}\right),\qquad A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

*verwenden.*

21. Es seien $f$ und $g$ reelle Funktionen mit geeigneten Definitions- und Wertebereichen. Untersuchen Sie, ob die Komposition $f\circ g$ eine Regelfunktion ist, wenn

(a) $f$ stetig und $g$ Regelfunktion ist.

(b) $f$ Regelfunktion und $g$ stetig ist.

(c) $f$ und $g$ beide Regelfunktionen sind.

(Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.)

22. Bestimmen Sie die folgenden Integrale durch Approximation des Integranden durch geeignete Treppenfunktionen mit den vorgegebenen Stützstellen:

(a) $\int_0^1 x^2\,dx$ und äquidistante Stützstellen.

(b) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ und Wurzeln $2^{k/n}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ als Stützstellen.