23. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 1/q & \text{für } x = p/q \text{ mit teilerfremden } p, q \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{für irrationales } x, \end{cases} \qquad x \in [0,1].$$

   (a) Zeigen Sie, dass f eine Regelfunktion ist.

   (b) Zeigen Sie, dass das Riemannsche Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ gleich 0 ist.

24. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n(x) := \frac{n\,x}{1 + n^2\,x^2}$$

nicht auf dem Intervall $[0,1]$, wohl aber auf jedem Teilintervall $[q,1]$, $0 < q < 1$, gleichmässig gegen die Grenzfunktion $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ konvergiert.

Bestimmen Sie die Grenzfunktion f und verifizieren Sie: für $0 < q < 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_q^1 f_n(x)\,dx = \int_q^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

25. Es seien $n, m \in \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 x^n\,(1-x)^m\,dx; \qquad \text{(b)} \quad \int x^n \sin(x)\,dx.$$

26. Berechnen Sie

$$\text{(a)} \quad \int \frac{1}{x\,(\ln(x))^3}\,dx; \qquad \text{(b)} \quad \int \sin^3(x)\cos^4(x)\,dx.$$

27. Berechnen Sie

$$\text{(a)} \quad \int \frac{x^5 - x + 1}{x^2\,(1-x^2)}\,dx; \qquad \text{(b)} \quad \int \frac{1}{x\,\sqrt{x^2+4}}\,dx.$$

28. Bestimmen Sie die Maclaurinreihe der Integralsinusfunktion

$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}$$

und diskutieren Sie deren Konvergenzverhalten.

Die Reihe wird nach dem 2. Term abgebrochen. Schätzen Sie den Fehler für $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

(bonus) Wieviele Terme der Reihe werden benötigt, um auf dem Intervall $[0, R]$, $R > 0$ fest, einen Fehler von höchstens 10^{-15} zu garantieren? *Approximieren Sie* $\ln(M!)$ *durch das Integral* $\int_1^M \ln(x)dx$.