

29. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad x \in [0, 1].$$

- (a) Zeigen Sie, dass f auf $[0, 1]$ keine Regelfunktion ist.
 (b) Zeigen Sie, dass f auf $[0, 1]$ Riemann integrierbar ist und bestimmen Sie das Integral $\int_0^1 f(x) dx$.

30. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale

$$(a) \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx; \quad (b) \int_{-3/4}^{7/4} \frac{dx}{\sqrt{6 + x - x^2}}.$$

31. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

gilt und berechnen Sie damit das Integral auf 10 Stellen genau.

32. Zeigen Sie, dass die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren:

$$(a) \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx; \quad (b) \int_0^{\infty} \ln(x)e^{-x} dx.$$

33. Zeigen Sie, dass das folgende Integral konvergiert:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx.$$

Zusatz: Zeigen Sie, dass dieses Integral den Wert 0 annimmt.

34. Bestimmen Sie Volumen und Oberfläche des Körpers, der bei Rotation des Kreises

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2, \quad b > a > 0$$

um die x -Achse entsteht.

35. Es sei f eine reelle Funktion von beschränkter Variation auf $[a, b]$.

- (a) Zeigen Sie, dass f auf $[a, b]$ die Differenz von zwei monoton wachsenden Funktionen ist. *Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen*

$$g(x) = \sup_{a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=x} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \quad \text{und} \quad g(x) - f(x).$$

- (b) Zeigen Sie, dass f eine Regelfunktion auf $[a, b]$ ist.