36. Beweisen Sie die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für Integrale*: Gegeben zwei Regelfunktionen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{C}$, dann gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\,dx}.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Integral $\int_a^b |f(x) - \lambda g(x)|^2 dx$, $\lambda \in \mathbb{C}$, *und wählen Sie* λ *geeignet.*

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = f(1) = 0$.
Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die Ungleichung

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx \right|^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 |f'(x)|^2\,dx.$$

37. Geben Sie einen detaillierten Beweis der Simpsonschen Regel mit Fehlerabschätzung.

38. Wenden Sie die (summierte) Simpsonsche Formel auf das Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

an, um π numerisch auf 5 Stellen zu bestimmen.

39. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

40. Zeigen Sie mittels Euler-Maclaurinsche Summationsformel:

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{N} \right) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \int_1^\infty \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^{3/2}}.$$

41. Setzen Sie die Riemannsche Zeta Funktion, bekanntlich für $\Re(s) > 1$ gegeben durch $\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \cdots$, analytisch fort auf $(-\infty, 1)$.

Hinweis: Zusatzaufgabe, kein Kreuz.