Beispiel 37 (Beweis der Simpsonschen Regel) und Beispiel 38 (Anwendung der summierten Simpsonschen Regel).

42. Beweisen Sie: Ist $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \xi$. Der Punkt ξ heißt *Fixpunkt* der Funktion f.

    Hinweis: betrachten Sie die Funktion $g(x) = f(x) - x$.

43. Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen $f : X \to X$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $q < 1$ in der jeweiligen angegebenen Metrik ρ sind:

    (a) $f(x) := x + \dfrac{1}{x}$ für $x \in X := [1, \infty)$ und $\rho(x, y) := |x - y|$.

    (b) $f(x, y) := \frac{1}{2}(\cos(x), \sin(y))$ für $(x, y) \in X := \mathbb{R}^2$ und $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$.

    (c) $f(x, y, z) := \frac{1}{2}(x, x+y, x+y+z)$ für $(x, y, z) \in X := \mathbb{R}^3$ und $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\infty$.

44. Gegeben ist die Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit

    $$f(x) := \frac{x + \frac{1}{3}}{x + 1}, \qquad x \geq 0.$$

    Zeigen Sie:

    (a) f ist eine strikt kontraktive Selbstabbildung. Geben Sie eine geeignete Kontraktionskonstante c an.

    (b) Bestimmen Sie einen Fixpunkt x^*. Ist dieser eindeutig?

    (c) Berechnen Sie (mit Taschenrechner) die ersten vier Iterationen x_1, x_2, x_3, x_4, wobei

    $$x_{k+1} = f(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

    für die Startwerte $x_0 \in \{0, 1, 100\}$.

    (d) Vergleichen Sie die *a-priori* Fehlerabschätzung (Beweis)

    $$|x_k - x^*| \leq \frac{c^k}{1 - c}|x_1 - x_0|$$

    mit der *a-posteriori* Fehlerabschätzung (Beweis)

    $$|x_k - x^*| \leq \frac{c}{1 - c}|x_k - x_{k-1}|$$

    für $k = 4$.