45. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Alle p-Normen in $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.
    Skizzieren Sie Einheitskugeln für verschiedene p in $\mathbb{R}^2$.

46. Die n-dimensionalen Polarkoordinaten sind definiert durch

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\,\sin(\theta_{n-2})\,\sin(\theta_{n-3})\cdots\sin(\theta_2)\,\sin(\theta_1)\cos(\phi),\\
x_2 &= r\,\sin(\theta_{n-2})\,\sin(\theta_{n-3})\cdots\sin(\theta_2)\,\sin(\theta_1)\sin(\phi),\\
x_3 &= r\,\sin(\theta_{n-2})\,\sin(\theta_{n-3})\cdots\sin(\theta_2)\,\cos(\theta_1),\\
x_4 &= r\,\sin(\theta_{n-2})\,\sin(\theta_{n-3})\cdots\cos(\theta_3)\\
&\vdots\\
x_{n-1} &= r\,\sin(\theta_{n-2})\cos(\theta_{n-3}),\\
x_n &= r\,\cos(\theta_{n-2}),
\end{aligned}$$

    wobei $\phi \in (-\pi, \pi]$ und $\theta_2, \dots, \theta_{n-2} \in [0, \pi]$ und $r \geq 0$.

    (a) Zeigen Sie induktiv, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 = r.$$

    (b) Zeigen Sie, dass die Koordinatentransformation

$$(r, \phi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) \xmapsto{T_n} (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

    ein Homöomorphismus zwischen $(0,\infty)\times\Pi_n$ und $\mathbb{R}^n\setminus\big(S\times\mathbb{R}^{n-2}\big)$ ist, jedoch nicht zwischen $[0,\infty)\times\overline{\Pi_n}$ und $\mathbb{R}^n$, wobei $\Pi_2 = (-\pi,\pi)$ und $\Pi_n = (-\pi,\pi)\times(0,\pi)^{n-2}$, $n \geq 3$, und $S = (-\infty, 0]\times\{0\}$. Skizzieren Sie Π_n und $T_n(\Pi_n)$ für $n = 2, 3$.

47. Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren eine Nullstelle von $f(x) = x^3 - 4x^2 - 6x + 2$ im Intervall $[0, 1]$ und geben Sie eine Abschätzung für den Fehler an.

48. Untersuchen Sie mindestens zwei der folgenden Funktionen auf Stetigkeit. Es gilt stets $f(x,y) = 0$ für $(x,y) = (0,0)$ und sonst ist $f(x,y)$ gegeben durch

    (a) $\dfrac{3x^2+2y^2}{x^2+y^2}$, (b) $\dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, (c) $\dfrac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,

    (d) $y\sqrt{\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}$, (e) $\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$, (f) $\dfrac{x^2y}{y^2+x^4}$.

    Hinweis: Setzen Sie Kreuz `48-2+` *für mindestens zwei Funktionen, Kreuz* `48-3+` *für mindestens drei Funktionen, usw.*