Aufgabe 1

(a) Sei $\mathbb{R}^{m\times n}$ die Menge der reellen $(m \times n)$-Matrizen $(m, n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass

$$d_F(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-y_{ij})^2}, \quad d_\infty(x,y) = \max_{i=1,\dots,m}\sum_{j=1}^{n}|x_{ij}-y_{ij}|,$$
$$d_1(x,y) = \max_{j=1,\dots,n}\sum_{i=1}^{m}|x_{ij}-y_{ij}|, \quad d_M(x,y) = \max_{i,j=1,\dots,m}|x_{ij}-y_{ij}|$$

Metriken auf $\mathbb{R}^{m\times n}$ definieren, und das sie äquivalent sind.

(b) Skizzieren Sie Einheitskugeln in $\mathbb{R}^2$ für die folgende Metriken:

$$d_1(x,y) = \sqrt{\frac{(x_1-y_1)^2}{4} + \frac{(x_2-y_2)^2}{9}}, \qquad d_2(x,y) = \frac{|x_1-y_1|}{2} + \frac{|x_2-y_2|}{3},$$
$$d_3(x,y) = \max\Big(\frac{|x_1-y_1|}{2}, \frac{|x_2-y_2|}{3}\Big).$$

Aufgabe 2 (a) Zeigen Sie, dass für die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

die iterierten Grenzwerte $\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = 0$ existieren, jedoch existiert der Grenzwert $\lim_{x,y\to 0} f(x,y)$ nicht.

(b) Zeigen Sie, dass für die Funktion

$$g(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

der Grenzwert $\lim_{x,y\to 0} g(x,y)$ existiert, jedoch existieren die beide iterierten Grenzwerte $\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} g(x,y)\big)$ und $\lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} g(x,y)\big)$ nicht.

(c) Führen Sie Polarkoordinaten $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ in folgender Funktion

$$h(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \qquad x^2+y^2 \neq 0,$$

ein und untersuchen Sie auf Konvergenz für $r^2 = x^2+y^2 \to 0$.
Ist die fortgesetzte Funktion mit $h(0,0) = 0$ stetig im Ursprung $(0,0)$?

(d) Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Konvergenz für $x, y \to \infty$:

$$q(x,y) = \Big(\frac{xy^2}{x^2+y^4}\Big)^{x+y}.$$

Aufgabe 3 Überprüfen Sie, ob die folgende Abbildungen

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f : [\sqrt{a}, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big) \quad (a > 0) \\ \text{(b)} & g : (-\infty, 3-\sqrt{3}) \cup (3+\sqrt{3}, \infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x}{3-x} \\ \text{(c)} & h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = 5x^2 + 2x + 3 - 2\sin(x) \end{array}$$

Lipschitz-stetig bzw. strikt kontraktiv sind? Besitzen sie keinen/einen/mehrere Fixpunkt(e)? Falls möglich, bestimmen Sie einen Fixpunkt mit dem Fixpunkt-Verfahren.

Aufgabe 4 Berechnen Sie die Länge der folgenden ebenen Kurven bzw. Raumkurven:

(a) $\gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = \ln(x),\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}\}$

(b) $\gamma_2 = \{(x = r\cos\phi, y = r\sin\phi) \in \mathbb{R}^2 :\ \phi = \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big),\ 1 \le r \le 3\}$

(c) $\gamma_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ zwischen $(x,y) = (a,0)$ und $(0,a)\}$ $(a > 0)$

(d) $\gamma_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = at,\ y = \sqrt{3ab}t^2,\ z = 2bt^3,\ 0 \le t \le T\}$ $(a, b, T > 0)$

Aufgabe 5 Mit Hilfe der Frenetschen Formeln beweisen Sie, dass

(a) für eine nach der Bogenlänge $s(T) = \int_0^T |\dot{\vec{x}}(t)|\, dt$ parametrisierte Kurve $\vec{x}(s)$ gilt:

$$(\vec{x}', \vec{x}'') = 0, \quad (\vec{x}', \vec{x}''') = -\kappa^2, \quad (\vec{x}'', \vec{x}''') = \kappa\kappa', \quad |\vec{x}'''|^2 = \kappa^4 + \kappa^2\tau^2 + (\kappa')^2;$$

(b) der Darboux-Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \tau\vec{t} + \kappa\vec{b}$ die Gleichungen

$$\vec{t}' = \vec{\omega} \times \vec{t}, \quad \vec{n}' = \vec{\omega} \times \vec{n}, \quad \vec{b}' = \vec{\omega} \times \vec{b}.$$

erfüllt.

Aufgabe 6 Bestimmen Sie das begleitende Dreibein $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ der folgenden Raumkurven:

$$\text{(a)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ a\sin(t) \\ b\,t \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \text{in } (0,0,0).$$

Aufgabe 7 Bestimmen Sie Krümmung κ und Torsion τ der folgenden Raumkurven:

$$\text{(a)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ a\sin(t) \\ b\,t \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ \sqrt{2}t \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \\ a\,t \end{pmatrix} \quad \text{in } (0,0,0).$$

Aufgabe 8 Bestimmen Sie, falls möglich, die Länge des Kurvenstücks mit Startpunkt für $t = 0$ und Endpunkt $t = \tau > 0$, der in den letzten beiden Aufgaben gegebenen Raumkurven.