Aufgabe 1

(a) Beweisen Sie, dass die implizite Gleichung

$$y - \varepsilon \sin(y) = x, \qquad \varepsilon \in (0,1) \text{ fest},$$

eine Funktion $y = f(x)$ definiert und berechnen Sie ggf. die Ableitung $f'(x)$.

(b) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ der parametrisierten Gleichung $y = f(x)$ mit

$$y = \cos^3 t + \imath \sin^3 t, \quad x = 2t - \cos t, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\imath^2 = -1).$$

Aufgabe 2 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerten mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^{x+1}(\ln x + 1) - x}{1 - x}; \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + e^x}{2} \right)^{\coth(x)}.$$

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass folgendes asymptotische Verhalten gilt ($x, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$):

(a) $x \sin(\sqrt{x}) \simeq x^{3/2}$ für $x \to 0^+$; (b) $(x+\varepsilon)^n \simeq x^n + n\varepsilon x^{n-1}$ für $\varepsilon \to 0$;

(c) $\dfrac{x^m - 1}{x^n - 1} \simeq \dfrac{m}{n}$ für $x \to 1$; (d) $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}} \simeq x^{1/8}$ für $x \to \infty$.

Aufgabe 4 Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen mittels der Jensenschen Ungleichung:

(a) Für alle positiven $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^n.$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2^n - 1)}{2 \cdot 4 \cdots 2^n} \leq \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n 2^n} \right)^n.$$

Hinweis: *Betrachten Sie die Funktion* $\ln(x)$.

Aufgabe 5

(a) Gegeben sei die folgende Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{für } 0 \le x \le 1, \\ \dfrac{1}{x} & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

(i) Beweisen Sie, dass f im Punkt $x = 1$ stetig differenzierbar ist.

(ii) Gibt es in $(0, 2)$ ein ξ so, dass $f(2) - f(0) = f'(\xi)(2-0)$? Falls ja, berechnen Sie es.

(b) Das Legendre-Polynom P_n ist durch folgende Rodrigues-Formel gegeben:

$$P_n(x) := \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(\left(1-x^2\right)^n \right), \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweisen Sie, dass P_n ein Polynom vom Grad n mit n verschiedenen Nullstellen im Intervall $(-1, 1)$ ist. **Hinweis:** *Wenden Sie den Satz von Rolle an.*

Aufgabe 6 Diskutieren Sie die folgenden reellen Funktionen:

$$\text{(a)} \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}; \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Programm: Definitionsmenge, Nullstellen, Stetigkeit und Differenzierbarkeit, Monotonie und lokale und globale Extrema, Wertebereich, Wendepunkte und Krümmungsverhalten, Verhalten am Rand des Definitionsbereiches, Asymptoten und Skizze.

Aufgabe 7 Untersuchen Sie, ob und ggf. wo die folgenden Funktionenfolgen auf den angegebenen Mengen für $n \to \infty$ gleichmässig konvergieren:

$$\text{(a)} \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad x \in \mathbb{R}; \qquad \text{(b)} \quad g_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\text{(c)} \quad h_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad x \in [0, 1].$$

Hinweis: *Betrachten Sie die Ableitung von h_n.*

Aufgabe 8 Untersuchen Sie die von den Parametern $p, q \in \mathbb{R}$ mit $q > 0$ abhängende Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin(nx)}{1+n^q}$$

auf punktweise und gleichmässige Konvergenz bzgl. $x \in (0, \pi)$.

Hinweis: *Dirichlet- bzw. Abel-Kriterium. Zeigen Sie, dass* $\left| \sum_{n=1}^{m} \sin(nx) \right| \le \frac{1}{|\sin(x/2)|}$.

Aufgabe 9 Bestimmen Sie die Summen der folgenden Reihen:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}; \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}.$$

Hinweis: *In (b), entwickeln Sie* $(2xe^{2x})'$ *in eine Taylorreihe und setzen Sie* $x = 1$.

Aufgabe 10 Bestimmen Sie mindestens eines der uneigentlichen Integrale

$$\text{(a)} \quad \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx \qquad \text{(b)} \quad \int \frac{1}{x + \sqrt{1 - 2x - x^2}}\, dx$$

$$\text{(c)} \quad \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 2x + 3}}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 3}}\, dx$$

mit Hilfe der Eulerschen Substitution:

$$\begin{cases} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x + t & \text{falls } a > 0, \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c} & \text{falls } c > 0, \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1) & \text{falls } ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \end{cases}$$

Aufgabe 11 Bestimmen Sie das uneigentliche Integral

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$$

mittels Weierstraß-Substitution:

$$\tan\frac{x}{2} = t, \qquad (2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 12

(a) Berechnen Sie die Länge des Funktionsgraphen:

$$y^2 = 2bx, \quad x \in (0, a) \quad (a, b > 0).$$

(b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche die von folgender implizit gegebener Kurve umschlossen wird:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1 \quad (a, ac - b^2 > 0).$$

Hinweis: *Lösen Sie die quadratische Gleichung nach* x *auf (Skizze).*