

7. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\oint_C (x^2 - y^2) dx + (x + y) dy$ längs der Berandung des Quadrats $|x| + |y| \leq 1$.

8. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C (yz + xz) dx + (xz - xy) dy + (xy + yz) dz$$

entlang der Verbindungsgeraden der Punkte $(0, 2, 1)$ und $(3, -2, 5)$ sowie entlang der

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 2 \cos(\pi t) \\ 4t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

gegebenen Kurve $(0 \leq t \leq 1)$. Ist das Integral wegunabhängig?

9. Überprüfen Sie die Integrabilitätsbedingungen für das Vektorfeld

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz - \cos(x - y) + \cos(x + y) - x \sin(x + y) - \sin(x + z) \\ xz + \cos(x - y) - x \sin(x + y) \\ xy + 2z - \sin(x + z) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $\mathbf{V}$ und berechnen Sie damit das Kurvenintegral

$$\int_{(0,0,0)}^{(\pi,-\pi,2\pi)} \mathbf{V} d\mathbf{x}.$$

10. Rechnen Sie den Laplace-Operator

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

in ebene Polarkoordinaten um.