

15. Weisen Sie den Integralsatz von Stokes für das Kurvenintegral

$$\oint_C xy \, dx + yz \, dy + xz \, dz$$

nach, wobei C die Berandung der Fläche

$$\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

bezeichnet.

16. Weisen Sie den Integralsatz von Gauß für das Oberflächenintegral

$$\oiint_{\mathcal{O}} x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy$$

nach, wobei $\mathcal{O}$ die Berandung des Körpers

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z \leq 16, \quad z \geq 0\}$$

bezeichnet.

17. Zeigen Sie für skalare Funktionen f, g und Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W}$

$$\text{grad}(fg) = f \, \text{grad} \, g + g \, \text{grad} \, f$$

$$\text{div}(f\vec{V}) = \langle \text{grad} \, f, \vec{V} \rangle + f \, \text{div}(\vec{V})$$

$$\text{rot}(f\vec{V}) = \text{grad}(f) \times \vec{V} + f \, \text{rot} \, \vec{V}$$

$$\text{div}(\vec{V} \times \vec{W}) = \langle \vec{W}, \text{rot} \, \vec{V} \rangle - \langle \vec{V}, \text{rot} \, \vec{W} \rangle$$

18. Sei $\mathcal{F}$ eine Fläche mit nach obenweisendem Normalvektor, deren Rand der Einheitskreis $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ ist. Überlegen Sie, dass der Wert des Integrals

$$\iint_{\mathcal{F}} z^2 \, dy \wedge dz + x^2 \, dz \wedge dx + y^2 \, dx \wedge dy$$

nicht von der Fläche $\mathcal{F}$ abhängt. Benutzen Sie diese Überlegung, um das Integral zu bestimmen.