1. Stellen Sie $w = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in Polarkoordinaten dar.

2. Zeigen Sie, dass die Gleichung
$$xe^y + ye^x = 0$$
lokal um $(0,0)$ nach y aufgelöst werden kann. Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der so gegebenen Funktion $y(x)$ and der Stelle $x = 0$.

3. Zeigen Sie, dass die Gleichungen
$$\begin{aligned} x\cos(z) + y\cos(x) + z\cos(y) &= 0 \\ \sin(x) + \sin(y) - \sin(z) &= 0 \end{aligned}$$
lokal um $(0,0,0)$ nach y und z aufgelöst werden können. Bestimmen Sie $y'(0)$, $y''(0)$, $z'(0)$ und $z''(0)$ der so gegebenen Funktionen $y(x)$ und $z(x)$.

4. Zeigen Sie, dass durch
$$\langle P, Q\rangle = P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) Q(x,y,z)\bigg|_{(x,y,z)=(0,0,0)}$$
ein nicht ausgeartetes symmetrisches Skalarprodukt auf dem Vektorraum der Polynome in drei Variablen $\mathbb{R}[x,y,z]$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass
$$\langle \Delta P, Q\rangle = \langle P, r^2 Q\rangle \qquad \text{mit } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1}$$
gilt (Δ bezeichnet den Laplace-Operator). Bezeichne $\mathcal{P}_n$ den Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad n und $\mathcal{H}_n = \{P \in \mathcal{P}_n \mid \Delta P = 0\}$ den Raum der homogenen harmonischen Polynome vom Grad n. Verwenden Sie (1), um
$$\mathcal{P}_n = \mathcal{H}_n \oplus r^2 \mathcal{P}_{n-2}$$
und weiter
$$\mathcal{P}_n = \bigoplus_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} r^{2k} H_{n-2k}$$
zu zeigen. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_n)$.

5. Seien $-1 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} \leq 1$ reelle Zahlen. Bestimmen Sie diejenigen Werte von $x_0, \ldots, x_{n+1}$, für die die *diskrete logarithmische Energie*

$$E(x_0, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{0 \leq i < j \leq n+1} \log \frac{1}{(x_j - x_i)}$$

minimal wird. Hinweise:

(a) Zeigen Sie zuerst, dass für einen Punktmenge minimaler Energie $x_0 = -1$ und $x_{n+1} = 1$ gelten muss.

(b) Bestimmen Sie für ein Polynom p mit lauter einfachen reellen Nullstellen die Partialbruchzerlegung von $\frac{p'}{p}$.

(c) Setzen Sie für eine Punktmenge minimaler Energie

$$p(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$$

und drücken Sie die notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial E(-1, x_1, \ldots, x_n, 1)}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

durch p aus.

(d) Zeigen Sie damit und durch Gradüberlegungen, dass p die Gleichung

$$(x^2 - 1)p''(x) + 4xp'(x) = Cp(x)$$

erfüllen muss. Identifizieren Sie C, indem Sie den Grad von p verwenden.

(e) Zeigen Sie, dass $p(x) = DP'_{n+1}(x)$ für ein $D \in \mathbb{R}$ gilt; dabei bezeichnet P_{n+1} das $n + 1$-te Legendre-Polynom.