14. Beweisen Sie die „Umrechnungsformeln“ zwischen reeller und komplexer Darstellung trignometrischer Polynome (bzw. Reihen): Wenn

$$\begin{aligned} P_N(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \\ P_N(t) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\omega n t}, \end{aligned}$$

dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0/2 & a_0 &= 2c_0 \\ c_n &= (a_n - ib_n)/2 & a_n &= c_n + c_{-n} \\ c_{-n} &= (a_n + ib_n)/2 & b_n &= i(c_n - c_{-n}) \end{aligned}$$

15. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Periode $L > 0$. Diese kann in eine Fourier-Reihe

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right)$$

entwickelt werden. Finden Sie Formeln für die Koeffizienten a_n und b_n.

16. Sei B_n das n-te Bernoulli-Polynom. Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $B_n(\{t\})$ ($\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$ bezeichnet den Bruchteil von t) in komplexer Darstellung. Verwenden Sie das Ergebnis, um die Werte $\zeta(2k+2)$ und $L(2k+1, \chi_2)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ zu bestimmen. Dabei ist

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ L(s, \chi_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}. \end{aligned}$$

17. Sei $\omega \notin \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(\pi\omega x)$ periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$ mit Periode 2. Leiten Sie daraus die Partialbruchzerlegung des Cotangens her.

18. Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cosh(\pi x)$ periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$ mit Periode 2. Bestimmen Sie damit den Wert der Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + 1}.$$