24. Die Bessel-Funktion zum Index n ist gegeben durch

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin(t) - nt)\,dt.$$

Zeigen Sie, dass $J_n(z)$ die Differentialgleichung

$$z^2 J_n''(z) + zJ_n'(z) + (z^2 - n^2)J_n(z) = 0$$

erfüllt. Zeigen Sie weiters die Potenzreihendarstellung

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}.$$

25. Seien I und J Intervalle, $\phi : I \to J$ und $\psi : I \to J$ differenzierbare Funktionen, und $f : I \times J \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Leiten Sie eine Formel für die Ableitung der Funktion

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)\,dt$$

für $x \in I$ her. *Hinweis: Kettenregel.*

26. Bestimmen Sie

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx,$$

indem Sie die Funktion

$$f(t) = \int_0^t \frac{\log(1+tx)}{1+x^2}\,dx$$

betrachten. Bestimmen Sie die Ableitung von f; deren Stammfunktion lässt sich leicht bestimmen. Identifizieren Sie damit f.

27. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Hinweis: Es gilt

$$e^{-n}\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{n!}\int_n^\infty x^n e^{-x}\,dx.$$

Diskutieren Sie die Funktion $f_n(x) = n\ln(x) - x$ und verwenden Sie das Ergebnis, um die Integrale

$$\int_n^{n+n^\alpha} x^n e^{-x}\,dx \quad \textit{und} \quad \int_{n+n^\alpha}^\infty x^n e^{-x}\,dx$$

für passend gewähltes $\alpha < 1$ abzuschätzen.

28. Für $t > 0$ sei der Operator A_t formal durch

$$(\mathrm{A}_t u)(x) = c_t \int_{-\infty}^{\infty} u(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}\, dy$$

definiert, wobei c_t die Normierungskonstante ist mit $\mathrm{A}_t\, 1 \equiv 1$ (d.h., $c_t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2t}}\, d\tau = 1$).

(a) Zeigen Sie, dass für eine auf $\mathbb{R}$ definierte und dort beschränkte Regelfunktion u (d.h., $|u(x)| \le M < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$) folgendes gilt:

$$\lim_{t\to 0^+} (\mathrm{A}_t u)(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x \text{ ein Stetigkeitspunkt von } u, \\ \frac{1}{2}\left(u(x^-) + u(x^+)\right) & \text{für } x \text{ kein Stetigkeitspunkt von } u \end{cases}$$

($u(x^-)$ und $u(x^+)$ sind der *links-* und *rechtsseitige* Grenzwert von u an x).

(b) Für eine auf $\mathbb{R}$ zweifach stetig differenzierbare beschränkte Funktion u gilt

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{(\mathrm{A}_t u)(x) - u(x)}{t} = a\, u''(x).$$

Die Konstante a ergibt sich aus der Rechnung.

Hinweise:

(i) Zur Bestimmung der Normierungskonstante c_t benützen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\, du = \sqrt{2\pi}$.

(ii) Zeigen Sie, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$c_t \int_{-\infty}^{-t^{1/3}} e^{-\frac{\tau^2}{2t}}\, d\tau + c_t \int_{t^{1/3}}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2t}}\, d\tau < \epsilon \qquad \textit{für alle } t < \delta.$$

Die damit nachgewiesene starke "Lokalisierung" von $c_t e^{-\frac{\tau^2}{2t}}$ für kleines positives t (verifizieren Sie dies graphisch) hilft beim Beweis von (a) *und* (b).