

29. Berechnen Sie das Integral:

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy,$$

wobei B der von den Kurven $y = -1$, $x = \sin \pi y$, $y = (x + 1)^3$ begrenzte Bereich ist und wobei $f(x, y) = xy^2$.

30. Berechnen Sie:

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

wobei

a) B durch $x^2 + y^2 = 2z$ und $z = 2$ begrenzt wird und $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

b) $B = \left\{ (x, y, z) \mid |x| + |y| + |z| \leq 1 \right\}$ und $f(x, y, z) = 1$.

c) $B = \left\{ (x, y, z) \mid |x| + |y| + |z| \leq 1 \right\}$ und $f(x, y, z) = z$.

31. Berechnen Sie die iterierten Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \right) dy \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy \right) dx.$$

Was ergibt sich für das zugehörige Doppelintegral?

32. Berechnen Sie das Integral

$$\int \cdots \int_{\substack{x_1 + x_2 + \dots + x_m \leq 1 \\ x_1, \dots, x_m \geq 0}} x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2 - 1} \cdots x_m^{\alpha_m - 1} \, dx_1 \cdots dx_m$$

für $\alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$.

33. Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int_{[0, 1]^n} f(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}) \, dx_1 \cdots dx_n.$$

Hinweis: verwenden Sie geeignete Approximationen.