34. Berechnen Sie die Oberfläche des Vivianischen Fensters

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \wedge (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

35. Sei f eine auf $[-1, 1]$ definierte Regelfunktion. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{\mathbb{S}^2} f(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)\, do(\mathbf{y}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{S}^2,$$

über die Einheitssphäre $\mathbb{S}^2$ in $\mathbb{R}^3$. Als Anwendung berechnen Sie die *Riesz s-Energie von* $\mathbb{S}^2$, $-2 < s < 2$ und $s \neq 0$, gegeben durch

$$\int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^s}\, do(\mathbf{x})\, do(\mathbf{y}).$$

Argumentieren Sie die Konvergenz im singulären Fall $0 < s < 2$.

36. Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$F(r) = \int \cdots \int_{x_1^2 + \cdots + x_m^2 \leq r^2} f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_m.$$

37. Leiten Sie die n-dimensionalen Polarkoordinaten her und bestimmen Sie die zugehörige Jacobi-Determinante. Berechnen Sie damit das Volumen der Kugel mit Radius r in $\mathbb{R}^n$.

38. Berechnen Sie das Integral

$$\int \cdots \int_{\substack{x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leq 1 \\ x_1, \ldots, x_m \geq 0}} x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2 - 1} \cdots x_m^{\alpha_m - 1}\, dx_1 \cdots dx_m$$

für $\alpha_1, \ldots, \alpha_m > 0$, indem Sie $x_1, \ldots, x_m$ jeweils mit dem Quadrat der Polarkoordinaten aus Beispiel 37 substituieren.