39. Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral

$$\int_C \left(3x^2(1+y^2)z\,dx + 2x^3yz\,dy + x^3(1+y^2)\,dz \right)$$

wegunabhängig ist. Bestimmen Sie die Potentialfunktion ϕ des Vektorfeldes $\mathbf{V}$ im obigen Integral. Berechnen Sie den Wert des Integrals entlang eines Weges von $(0,0,1)$ nach $(2,4,1)$ und mit Hilfe der Potentialfunktion ϕ.

40. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\partial F} 2xy\,dx + x^2\,dy + (1+x-z)\,dz$$

längs der Schnittkurve der beiden Flächen $z = x^2 + y^2,\ 2x + 2y + z = 7$. Dabei werde die Berandung ∂F vom Ursprung aus gesehen im Uhrzeigersinn durchlaufen.

41. Berechnen Sie das Potential

$$F(\mathbf{y}) = \iiint_K \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\,dx\,dy\,dz$$

der Kugelschale $\{\mathbf{x} \mid R_1 \le \|\mathbf{x}\| \le R_2\}$ (für $0 < R_1 < R_2$) auf einen Punkt $\mathbf{y}$ mit $\|\mathbf{y}\| < R_1$. Berechnen Sie analog dazu das Potential auf einen Punkt außerhalb einer Vollkugel.

42. Sei $\Phi : U \to V$ $(U, V \subset \mathbb{R}^2)$ ein Diffeomorphismus. Weiters sei $B \subset U$ ein Normalbereich bezüglich beider Achsen und (P, Q) ein Vektorfeld auf V. Zeigen Sie, dass dann der Integralsatz von Gauß auch für das Kurvenintegral

$$\oint_{\partial\Phi(B)} P\,dx + Q\,dy$$

erfüllt ist.