

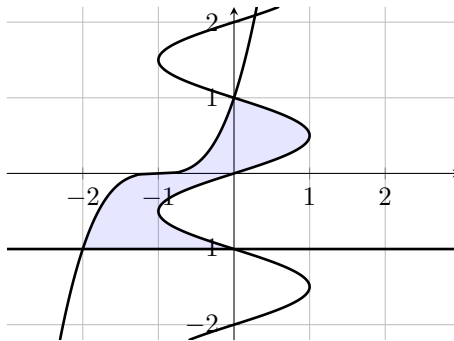
1. a) Wir verwenden den *Satz von FUBINI*:

$$\begin{aligned} \iint_{[-1,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]} x \sin(y) - ye^x \, dx dy &= \int_{-1}^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(y) - ye^x \, dy dx = \int_{-1}^1 -x \cos(y) - \frac{1}{2} y^2 e^x \Big|_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 x - \frac{\pi^2}{8} e^x \, dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{\pi^2}{8} e^x \Big|_{x=-1}^1 = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{1}{e} - e \right) \end{aligned}$$

- b) Wir verwenden erneut den *Satz von FUBINI*:

$$\begin{aligned} \iint_{[-1,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]} \sin(x)^2 \cos(y)^2 \, dx dy &= \int_{-1}^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^2 \cos(y)^2 \, dy dx = \int_{-1}^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \frac{1 + \cos(2y)}{2} dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1 - \cos(2x)}{2} \left(\frac{y}{2} + \frac{\sin(2y)}{4} \right) \Big|_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1 - \cos(2x)}{2} \frac{\pi}{4} dx \\ &= \frac{\pi}{8} \int_{-1}^1 1 - \cos(2x) \, dx = \frac{\pi}{8} \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) \Big|_{x=-1}^1 \\ &= \frac{\pi}{8} \left(1 + 1 - \frac{\sin(2)}{2} + \frac{\sin(-2)}{2} \right) = \frac{\pi}{8} (2 - \sin(2)) \end{aligned}$$

2. Der angegebene Bereich ist ein Normalbereich bezüglich der y-Achse:



$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-1; 1], \sqrt[3]{y} - 1 \leq x \leq \sin(\pi y) \}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \iint_B xy^2 \, dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{\sqrt[3]{y}-1}^{\sin(\pi y)} xy^2 \, dx dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 y^2 \Big|_{\sqrt[3]{y}-1}^{\sin(\pi y)} dy = \int_{-1}^1 \sin(\pi y)^2 y^2 - (\sqrt[3]{y} - 1)^2 y^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1 - \cos(2\pi y)}{2} y^2 - y^{\frac{8}{3}} + 2y^{\frac{7}{3}} - y^2 dy \\ &= -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \cos(2\pi y) y^2 dy + \int_{-1}^1 -\frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} y^{\frac{8}{3}} + y^{\frac{7}{3}} dy. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Integrale separat. Für das erste verwenden wir partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \cos(2\pi y) y^2 dy &= \frac{\sin(2\pi y)}{2\pi} y^2 \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\sin(2\pi y)}{\pi} y dy = 0 + \frac{\cos(2\pi y)}{2\pi^2} y \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\cos(2\pi y)}{2\pi^2} dy = \frac{1}{\pi^2} + 0 \\ \int_{-1}^1 -\frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} y^{\frac{8}{3}} + y^{\frac{7}{3}} dy &= -\frac{1}{12} y^3 - \frac{3}{22} y^{\frac{11}{3}} + \frac{3}{10} y^{\frac{10}{3}} \Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{6} - \frac{3}{11} = -\frac{29}{66} \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also

$$\iint_B xy^2 \, dx dy = -\frac{29}{66} - \frac{1}{4\pi^2}.$$

3. Hier sind die angegebenen Bereiche Normalbereiche bezüglich beider Achsen, wir werden sie als Normalbereiche bezüglich der x-Achse betrachten.

a)

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0; 1], 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

$$\begin{aligned} \iint_B x^2 y \, dx dy &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y \, dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (1-x)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^4 - 2x^3 + x^2 \, dx = \frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{60} \end{aligned}$$

- b) & c) Da hier sowohl die Gebiete symmetrisch zur x-Achse sind und die zu integrierende Funktion $f(x, y) = x^2 y$ ungerade in y ist, also $f(x, -y) = -f(x, y)$, sind beide Integrale gleich 0.

Alternativ zu dieser Argumentation kann man die beiden Gebiete natürlich auch als Normalbereiche auffassen und die Integrale ausrechnen, mit demselben Ergebnis:

b)

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0; 1], x - 1 \leq y \leq 1 - x\}$$

$$\iint_B x^2 y \, dx dy = \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} x^2 y \, dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (1-x)^2 - x^2 (x-1)^2 \, dx = 0$$

- c) Aus der Ellipsengleichung $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ bekommen wir die Normalbereichsdarstellung

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-a; a], -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right\}.$$

Somit gilt

$$\iint_B x^2 y \, dx dy = \int_0^1 \int_{-\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} x^2 y \, dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \left(\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 - x^2 \left(-\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 \, dx = 0.$$