

Musterlösung Blatt 2

Aufgabe 4

Berechnen Sie das Volumen der Körper, die von den angegebenen Flächen begrenzt werden:

a)

Die gegebenen Gleichungen lauten

$$x - y + z = 6, \quad x + y = 2, \quad x = y, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Man sieht, dass es mehr Gleichungen zu x und y gibt, also nimmt man einen Ansatz mit Grenzen $[0, 6 - x + y]$ für z . Wenn man sich die restlichen 3 Gleichungen im $\mathbb{R}^2$ aufzeichnet, sieht man, dass diese ein Dreieck bilden. Dies gibt uns folgende Darstellung des eingeschlossenen Körpers:

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 6 - x + y] \wedge x \in [0, 2] \wedge (x < 1 \Rightarrow y \in [0, x]) \wedge (x \geq 1 \Rightarrow y \in [0, 2 - x])\}.$$

Somit können wir nun das Volumen berechnen:

$$\begin{aligned} V(K) &= \iiint_K 1 d\vec{x} = \int_0^1 \int_0^x \int_0^{6-x+y} 1 \, dz dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} \int_0^{6-x+y} 1 \, dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x 6 - x + y \, dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} 6 - x + y \, dy dx \\ &= \int_0^1 x(6 - x) + \frac{x^2}{2} \, dx + \int_1^2 (2 - x)(6 - x) + \frac{(2 - x)^2}{2} \, dx \\ &= \int_0^1 6x - \frac{x^2}{2} \, dx + \int_1^2 \frac{3x^2}{2} - 10x + 14 \, dx \\ &= 3 - \frac{1}{6} + (4 - 20 + 28) - \left(\frac{1}{2} - 5 + 14\right) = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass das Ergebnis Sinn ergibt, da das Dreieck in der x - y -Ebene Fläche 1 hat und der Körper die Höhe $6 - x + y$ hat, was den Wert von 5.3 plausibel erscheinen lässt. Dies ist kein mathematischer Beweis, aber eine nützliche Hilfe, um Intuition dafür zu kriegen, ob das Ergebnis stimmen kann.

b)

Die gegebenen Gleichungen lauten

$$z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad 0 < y < 1, \quad z = 0.$$

Man sieht, dass z geeignet abgegrenzt werden kann, weswegen man einen Ansatz mit Grenzen $[0, x^2 + y^2]$ für z verfolgen kann. Da y bereits eingeschränkt ist, löst man die andere Gleichung nach x auf und erhält:

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, x^2 + y^2] \wedge x \in [-\sqrt{y}, \sqrt{y}] \wedge y \in [0, 1]\}.$$

Somit können wir nun das Volumen berechnen:

$$\begin{aligned}
V(K) &= \iiint_K 1 d\vec{x} = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{x^2+y^2} 1 dz dx dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 + y^2 dx dy \\
&= \int_0^1 \frac{2\sqrt{y}^3}{3} + 2\sqrt{y}y^2 dy = \frac{2}{3} \int_0^1 y^{\frac{3}{2}} + 3y^{\frac{5}{2}} dy \\
&= \frac{88}{105}.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass das Ergebnis Sinn ergibt, da die Fläche in der x-y-Ebene (bei beliebigem z-Wert) immer unter 1 liegen wird und es weniger x, y-Werte gibt, die $z > 1$ ermöglichen (!), als nicht. Dies ist kein mathematischer Beweis, aber eine nützliche Hilfe, um Intuition dafür zu kriegen, ob das Ergebnis stimmen kann.

c)

Die gegebenen Gleichungen lauten

$$z^2 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 3x, z > 0.$$

Man sieht, dass z wieder geeignet abgegrenzt werden kann, weswegen man einen Ansatz mit Grenzen $[0, x^2 + y^2]$ für z verfolgen kann. Die letzte Gleichung lässt sich auf einen Kreis umformen:

$$3x = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 2 \cdot 1.5x + y^2 \Leftrightarrow 1.5^2 = (x - 1.5)^2 + y^2 \Leftrightarrow 1.5 = \|(x, y) - (1.5, 0)\|$$

Damit erhält man den Körper K , welcher als Bild von K' unter der Transformation Φ betrachtet werden kann, was eine Lösung mittels Zylinderkoordinaten ermöglicht:

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, \sqrt{x^2 + y^2}] \wedge y \in [-\sqrt{3x - x^2}, \sqrt{3x - x^2}] \wedge x \in [0, 3]\}$$

$$K' = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, r], r \in [0, 3 \cos(\varphi)], \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}.$$

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (r, \varphi, z) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) \Rightarrow \Phi(K') = K$$

Wichtig ist dabei, dass man den Radius r über die Gleichung $x^2 + y^2 = 3x$ eingrenzt, was eine natürliche Darstellung des Kreises mit Mittelpunkt $(1.5, 0)$ und Radius 1.5 erlaubt, wenn man φ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ gehen lässt. Durch Anwendung des Transformationssatzes (siehe Aufgabe 5 für die Berechnung der Determinante) erhält man nun das Integral

$$\begin{aligned}
V(K) &= \iiint_{K=\Phi(K')} 1 d\vec{x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3 \cos(\varphi)} \int_0^r r dz dr d\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3 \cos(\varphi)} r^2 dr d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(3 \cos(\varphi))^3}{3} d\varphi = 9 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)^3 d\varphi \\
&= 9 \cdot (\cos^2(\varphi) \sin(\varphi)) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(\varphi) \sin^2(\varphi) d\varphi \\
&= 9 \cdot \left[\cos^2(\varphi) \sin(\varphi) + \frac{2 \sin^3(\varphi)}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 12.
\end{aligned}$$

Welches sich mittels partieller Integration und dem Erkennen trigonometrischer Stammfunktionen berechnen lässt.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_B (x + y + z)^2 dx dy dz$$

über dem Bereich

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2)\}.$$

Lösung: Man kann den Bereich mit Zylinderkoordinaten wie folgt anschreiben:

$$B = \{(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 4 - r^2\}.$$

Das ergibt uns das Integral

$$\int_0^2 \int_0^{4-r^2} \int_0^{2\pi} (r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \sin(\varphi) + z)^2 \cdot \det(J_\Phi(r, \varphi, z)) \, d\varphi dz dr,$$

wobei letzteres die Determinante der Jacobi-Matrix der Transformation Φ ist, die Zylinderkoordinaten auf die kartesischen Koordinaten abbildet:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \varphi, z) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z), \\ J_\Phi(r, \varphi, z) &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(J_\Phi(r, \varphi, z)) = r \cos^2(\varphi) + r \sin^2(\varphi) = r. \end{aligned}$$

Wobei die Determinante hier mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz berechnet wurde. Somit können wir rechnen:

$$\begin{aligned} \iiint_B (x + y + z)^2 dx dy dz &= \int_0^2 \int_0^{4-r^2} \int_0^{2\pi} (r \cos(\varphi) + r \sin(\varphi) + z)^2 \cdot r \, d\varphi dz dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{4-r^2} \int_0^{2\pi} r \cdot (r^2 \cdot (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) + z^2 + 2r \cdot (r \cos(\varphi) \sin(\varphi) + z \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi))) \, d\varphi dz dr \\ &\triangleq \int_0^2 \int_0^{4-r^2} \int_0^{2\pi} r \cdot (r^2 + z^2) \, d\varphi dz dr \\ &= 2\pi \int_0^2 r^3 \cdot (4 - r) + r \cdot \frac{(4 - r^2)^3}{3} \, dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^2 -r^7 + 12r^5 - 3r^4 - 36r^3 + 64r \, dr \\ &= 32\pi. \end{aligned}$$

Wobei die Gleichung bei $\triangle$ gilt, weil das Integral über $\cos(\varphi), \sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi) \sin(\varphi)$ von 0 bis 2π 0 ergibt und $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$. $\square$

Aufgabe 6

Berechnen Sie das elektrische Potential

$$P(\vec{y}) = G \iiint_K \frac{\rho}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \, dx_1 dx_2 dx_3$$

einer Kugelschale $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid R_1 \leq \|\vec{x}\| \leq R_2\}$ auf einen innerhalb liegenden Punkt $\vec{y}$ (G, ρ sind Konstanten). Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

Lösung: Man kann die Kugelschale mit Kugelkoordinaten wie folgt anschreiben:

$$K = \{(r, \varphi, \theta) : R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Das ergibt uns das Integral

$$G \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \cdot \det(J_\Phi(r, \varphi, \theta)) \, d\theta d\varphi dr,$$

wobei $\vec{x}$ in Kugelkoordinaten dasteht und letzteres die Determinante der Jacobi-Matrix der Transformation Φ ist, die Kugelkoordinaten auf die kartesischen Koordinaten abbildet:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \varphi, \theta) \mapsto (r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta)), \\ J_\Phi(r, \varphi, \theta) &= \begin{bmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) & 0 & -r \sin(\theta) \end{bmatrix} \Rightarrow \det(J_\Phi(r, \varphi, \theta)) = r^2 \sin(\theta). \end{aligned}$$

Wobei die Determinante [hier](#) nachgeschaut wurde. Danach kann man die Kugel so drehen, dass $\vec{y}$ auf die z-Achse rotiert wird und schreiben $R\vec{y} = \vec{z} = (0, 0, z)$. Dies wird hier nicht weiter ausgeführt, da Rotationen eine Kugel auf sich selbst abbilden (also unsere Integrationsgrenzen sich nicht ändern) und Jacobi-Determinante 1 haben. Somit können wir rechnen:

$$\begin{aligned} P(\vec{y}) &= G \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \cdot r^2 \sin(\theta) \, d\theta d\varphi dr \\ &= G \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho}{\|\vec{x} - \vec{z}\|} \cdot r^2 \sin(\theta) \, d\theta d\varphi dr \\ &= G\rho \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r^2 \sin(\theta)}{\sqrt{(r \sin(\theta) \cos(\varphi) - 0)^2 + (r \sin(\theta) \sin(\varphi) - 0)^2 + (r \cos(\theta) - z)^2}} \, d\theta d\varphi dr \\ &= G\rho \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r^2 \sin(\theta)}{\sqrt{r^2 \sin^2(\theta) + r^2 \cos^2(\theta) - 2rz \cos(\theta) + z^2}} \, d\theta d\varphi dr \\ &= 2\pi G\rho \int_{R_1}^{R_2} \int_0^\pi \frac{r^2 \sin(\theta)}{\sqrt{r^2 - 2rz \cos(\theta) + z^2}} \, d\theta dr = 2\pi G\rho \int_{R_1}^{R_2} \int_0^\pi \frac{rz \sin(\theta)}{\sqrt{r^2 - 2rz \cos(\theta) + z^2}} \cdot \frac{r}{z} \, d\theta dr \\ &= 2\pi G\rho \int_{R_1}^{R_2} \left[\sqrt{r^2 - 2rz \cos(\theta) + z^2} \cdot \frac{r}{z} \right]_{\theta=0}^\pi \, dr = 2\pi G\rho \int_{R_1}^{R_2} (\sqrt{r^2 + 2rz + z^2} - \sqrt{r^2 - 2rz + z^2}) \cdot \frac{r}{z} \, dr \\ &= 2\pi G\rho \int_{R_1}^{R_2} (|r+z| - |r-z|) \cdot \frac{r}{z} \, dr \stackrel{z=\|\vec{y}\| < r}{=} 2\pi G\rho \int_{R_1}^{R_2} \frac{r}{z} \cdot (r+z-r+z) \, dr = 2\pi G\rho \int_{R_1}^{R_2} 2r \, dr \\ &= 2\pi G\rho (R_2^2 - R_1^2). \end{aligned}$$

Wobei bei der vorletzten Gleichheit relevant ist, dass 'innerhalb der Kugelschale' bedeutet, dass $\vec{y}$ in der Kugel mit dem kleineren Radius liegt - also im Innenraum der hohlen Kugelschale. Das Ergebnis bedeutet physikalisch, dass das elektrische Potential innerhalb einer Kugelschale konstant ist, da das Ergebnis nicht von $\vec{y}$ abhängt. Da $0 = -\nabla P(\vec{y}) = E$ ist das elektrische Feld 0, was bedeutet, dass auf Ladungen innerhalb der Kugelschale keine Kräfte wirken.

□